JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Institut, professeur d'Analyse à l'École Polytechnique.

30705

TOME SIXIÈME.

ANNÉE **1841.**

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1841

QA
1
J684
t.6

20762
c.

TABLE DES MATIÈRES.

Page.

Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati; par *J. Liouville* 1

Note sur la vraie valeur des fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$; par M. *Bertrand*. 14

Mémoire sur une formule de Vandermonde et son application à la démonstration d'un théorème de M. Jacobi; par M. *V.-A. Lebesgue* 17

Sur l'intégrale $\int_0^{\pi} \cos i(u - x \sin u)\, du$; par *J. Liouville* 36

Mémoires sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité; par *G. Lamé* 37

Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs deux espèces de courbures; par M. *J. Binet* 61

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville, par M. *P.-H. Blanchet* 65

Sur une formule de M. Jacobi; par *J. Liouville* 69

Solution d'un problème de combinaisons; par *E. Catalan* 74

Deux problèmes de probabilités; par *le même* 75

Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple; par *le même* 81

Note sur la théorie de la convergence et de la divergence des séries; par M. *J.-L. Raabe* 85

Expériences sur les oscillations de l'eau dans une grande conduite de Paris; par *A. de Caligny* 89

Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général; par M. *J. Steiner* 105

Sur la résolution des équations numériques à une ou plusieurs inconnues et de forme quelconque; par M. *F. Sarrus* 171

Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces; par M. *A. Transon* 191

Thèse sur la distinction des maxima et des minima dans les questions qui dépendent de la méthode des variations; par M. *Ch. Delaunay* 209

Note sur l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx$; par M. *Ossian Bonnet* 238

Remarques sur la théorie géométrique des axes permanents de rotation; par M. *G. Gaschéau* 241

De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d'une transformation analytique remarquable; par M. *Jacobi* 267

Pages.

Démonstration élémentaire d'un théorème de Legendre relatif à la trigonométrie sphérique : par M. *Gauss* 273
Notice sur un manuscrit hébreu du Traité d'Arithmétique d'Ibn-Esra, conservé à la Bibliothèque royale : par M. *O. Terquem* 275
Des propriétés osculatrices de deux surfaces en contact par un point ; par M. *Théodore Olivier* 297
Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante ; par M. *Ch. Delaunay* 309
Note à l'occasion de l'article précédent ; par M. *Sturm* 315
Système de fontaines intermittentes et d'appareils à élever l'eau sans pièce mobile ; par M. *Anatole de Caligny* 321
Problème de calcul intégral ; par *E. Catalan* 340
Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques ; par *J. Liouville* 345
Sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination ; par M. *Minding* . . . 412
Problèmes de calcul intégral ; par M. *E. Catalan* 419
Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville ; par M. *Abel Transon* 441
Sur une classe d'équations différentielles ; par *J. Liouville* 448
Recherches sur la théorie des nombres entiers et sur la résolution de l'équation indéterminée du premier dégré qui n'admet que des solutions entières ; par M. *J. Binet* 449
Note sur la convergence des suites ; par *le même* 495

ERRATA.

Pages	Lignes	
12,	5 en rem.,	Le cas où $\beta = 0$, etc., *supprimez cette phrase et la suivante*
15,	5 en rem.,	*au lieu de* $a + \theta(h - h')$, *lisez* $a + h' - \theta h - h'$
16,	15,	*au lieu de* infini, *lisez* nul
117,	14,	*après* sphériques, *ajoutez* isoscèles
160,	12,	*au lieu de* arcs de cercle égaux, *lisez* arcs de cercle à rayons égaux
167,	26,	*au lieu de* arcs de cercle égaux, *lisez* arcs de cercle à rayons égaux
238,	7,	*au lieu de* $\frac{1}{2^a}$, *lisez* $\frac{1}{2^a} \cdot \frac{\pi}{2}$
240,	3,	*au lieu de* $2a' - 1$, *lisez* $1 - 2a'$
257,	3 en rem.,	*au lieu de* $(A - C) \cos \xi \cos \gamma$, *lisez* $(B - C) \cos \beta \cos \gamma$
259,	12,	*au lieu de* Y', *lisez* τ'
259,	15,	*au lieu de* T et T', *lisez* τ et τ'
259,	5 en rem.,	*au lieu de* Y, *lisez* τ
259,	2 en rem.,	*au lieu de* Y', *lisez* τ'
364,	dernière,	*au lieu de* $\rho' d\omega = d\rho$, $\rho'' d\omega = d\rho'$, *lisez* $\rho' d\omega = -d\rho$, $\rho'' d\omega = -d\rho'$
386,	16,	*au lieu de* $\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h} = -\frac{\Sigma k}{\Sigma h}$, *lisez* $\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h}$
386,	20,	*supprimez la fin de la phrase à partir des mots* ou (ce qui revient au même) est égale, etc.
401,	8,	*au lieu de* ω et θ, *lisez* ω et Ω.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

REMARQUES NOUVELLES

SUR

L'ÉQUATION DE RICCATI;

PAR J. LIOUVILLE.

[Présentées à l'Academie le 9 novembre 1840.]

L'équation différentielle du premier ordre, connue sous le nom d'équation de Riccati, a été l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres. Cette équation renferme dans son premier membre la somme de deux termes, l'un égal à la dérivée de la fonction principale y prise par rapport à la variable indépendante x, l'autre égal au produit du carré de y par une constante : dans le second membre, il entre un seul terme proportionnel à une puissance de la variable indépendante : l'exposant m de cette puissance peut être nommé *module* de l'équation.

Pour toutes les valeurs du module, on a trouvé la valeur complète de la fonction y exprimée sous forme finie à l'aide de quadratures définies. Mais lorsqu'on se borne à admettre dans le calcul les signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, les cas d'intégrabilité deviennent très rares. Ceux que l'on a indiqués répondent à une cer-

taine forme des valeurs du module m, savoir

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1};$$

on les a obtenus par des artifices particuliers, et les méthodes qui les ont fait connaître ne prouvent pas qu'ils soient les seuls possibles. On ignore complétement s'il y a d'autres valeurs du module m pour lesquelles la fonction Y pourrait s'exprimer en X à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. A la vérité les efforts réitérés des analystes pour découvrir quelque nouveau cas d'intégrabilité n'ayant produit aucun résultat, on est naturellement porté à croire qu'il n'en existe aucun différent de ceux que nous venons de citer. On conçoit pourtant que cela est loin de constituer une démonstration rigoureuse. J'ai donc pensé qu'il pouvait être bon de soumettre la question à une analyse exacte, et je suis parvenu à démontrer que les cas d'intégrabilité indiqués plus haut sont en effet les seuls admissibles. J'ajoute qu'il en serait encore ainsi lors même qu'aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, on joindrait le signe $\int$ d'intégration indéfinie relative à la variable X.

1. On sait que l'équation de Riccati, savoir

$$(1) \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + a\mathrm{Y}^2 = b\mathrm{X}^m,$$

se ramène immédiatement à la forme

$$\frac{dv}{dz} + v^2 = z^m;$$

et qu'en posant

$$v = \frac{d.\log u}{dz} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dz},$$

elle devient

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} = z^m.u.$$

Maintenant faisons

$$u = z^p.y,$$

ce qui nous donnera

$$z^p \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + 2pz^{p-1} \cdot \frac{dy}{dz} + p(p-1)z^{p-2} \cdot y = z^{m+p} \cdot y,$$

puis substituons à la variable indépendante z une autre variable indépendante x, liée avec elle par la relation $z = x^r$. L'équation nouvelle entre y et x à laquelle nous serons conduits sera assez compliquée : mais on la simplifiera beaucoup en disposant convenablement des exposants indéterminés r et p. Nous prendrons

$$r = \frac{2}{m+2}, \quad p = \frac{r-1}{2r} = -\frac{m}{4}.$$

De cette manière on aura

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right) \cdot \frac{1}{x^2}\right] y,$$

équation comprise dans la formule générale

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right) y,$$

dont elle se déduit en posant

$$A = \left(\frac{2}{m+2}\right)^2, \quad B = -\left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \cdot \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right).$$

A la vérité notre transformation devient impossible lorsque l'on a

$$m = -2,$$

mais alors l'équation (2) s'intègre immédiatement, et l'on trouve

$$u = Cz^q + C'z^{q'},$$

q et q' étant les deux racines de l'équation $q(q-1) = 1$, tandis que C et C' sont des constantes arbitraires. Nous mettrons de côté ce cas particulier : nous supposerons aussi que l'on n'a ni $m = 0$, ni $m = -4$, et que par suite B n'est pas zéro. Pour $m = 0$, l'équa-

tion (2) fournirait

$$u = Ce^{z} + C'e^{-z};$$

pour $m = -4$, l'équation (3) se réduisant à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y,$$

s'intégrerait sans difficulté.

Si la valeur de y peut s'exprimer en fonction de x à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes d'intégrations indéfinies relatives à la variable indépendante x, il est visible que y devra s'exprimer de la même manière en fonction de x, et *vice versâ*. Au lieu de discuter en elle-même et directement l'équation de Riccati, il reviendra donc au même de discuter l'équation (4) à laquelle elle est intimement liée; c'est ce que nous allons faire. Pour plus de généralité, nous supposerons, dans nos premiers calculs, que les coefficients A et B ont des valeurs quelconques différentes de zéro, nous réservant de donner plus tard à ces coefficients les valeurs particulières qui conviennent à l'équation de Riccati.

2. Prouvons d'abord que l'équation (4) n'est vérifiée par aucune intégrale de la forme $y =$ *une fonction algébrique de* x, l'intégrale insignifiante $y = 0$ étant, bien entendu, mise de côté. Faisons

$$A + \frac{B}{x^2} = P,$$

en sorte que notre équation (4) devienne

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py.$$

Dès lors tous les raisonnements contenus dans les n^{os} **4** et **5** de mon *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* [*], s'appliqueront à l'équation (5) sans qu'on ait besoin d'y changer un seul mot. Pour prouver

[*] Tome IV de ce Journal, page 423.

que l'équation (5) n'a pas d'intégrale algébrique, il suffit donc de prouver que le système d'équations suivant

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= u',\\
\frac{du'}{dx} &= \mu \mathrm{P}u + u'',\\
\frac{du''}{dx} &= 2(\mu - 1)\mathrm{P}u' + u''',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{du^{(i+1)}}{dx} &= (i+1)(\mu - i)\mathrm{P}u^{(i)} + u^{(i+2)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{du^{(\mu)}}{dx} &= \mu \mathrm{P}u^{(\mu-1)},
\end{aligned}\right.$$

ne peut jamais avoir lieu en prenant pour u une valeur rationnelle différente de zéro.

Si la valeur de u était rationnelle en x, celles de u', u'', etc., le seraient également. Imaginons que dans toutes ces fonctions et dans les produits $\mathrm{P}u$, $\mathrm{P}u'$, etc., on ait séparé la partie entière de la partie fractionnaire, puis décomposé celle-ci en fractions simples par le procédé connu. Je dis qu'il n'entrera dans u aucune fraction dont le dénominateur soit de la forme $(x - x_1)^\gamma$, γ étant un nombre entier égal ou supérieur à l'unité, et x_1 une quantité différente de zéro; en effet, parmi toutes les fractions simples de la forme citée qu'on voudrait admettre dans la valeur de u, considérons spécialement celle pour laquelle l'exposant γ est le plus grand possible; à l'inspection des équations (6), nous voyons que le facteur $x - x_1$ devrait entrer dans les dénominateurs de u', u'',..., $u^{(\mu-1)}$, $u^{(\mu)}$, avec les exposants respectifs $\gamma + 1$, $\gamma + 2$,..., $\gamma + \mu - 1$, $\gamma + \mu$, ce qui est impossible puisque l'on a

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu \mathrm{P}u^{(\mu-1)}.$$

Ce raisonnement cesserait d'être exact si l'on avait $x_1 = 0$, puisque P contient x en diviseur; nous voyons donc que le dénominateur de u

doit se réduire à une simple puissance de x, et que par suite il en est de même des dénominateurs de u', u'',... Toutes les quantités u, u', u'',..., peuvent donc s'exprimer par une suite de monomes formés chacun du produit d'une constante par une puissance de x égale à un nombre entier positif, nul ou négatif. Nous supposerons ces monomes ordonnés par rapport aux puissances descendantes de x, et pour mettre en évidence leurs premiers termes, nous écrirons

$$u = hx^n + \text{etc.}, \quad u' = h_1 x^{n_1} + \text{etc.}, \quad u'' = h_2 x^n + \text{etc.}$$

En même temps nous remplacerons la derniere des équations (6) par les deux équations équivalentes

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu \mathrm{P} u^{(\mu-1)} + u^{(\mu+1)}, \quad u^{(\mu+1)} = 0,$$

et nous chercherons les valeurs de h_1, h_2,..., $h_{\mu+1}$: il faudra que l'on ait $h_{\mu+1} = 0$ pour que l'équation $u_{\mu+1} = 0$ soit satisfaite, et par conséquent pour que les équations (6) aient lieu avec une valeur rationnelle de u.

L'équation

$$u' = \frac{du}{dx}$$

donne d'abord

$$u' = nhx^{n-1} + \text{etc.};$$

d'où

$$n_1 = n - 1, \quad h_1 = nh.$$

L'équation

$$u'' = \frac{du'}{dx} - \mu \mathrm{P} u,$$

en observant que P est de la forme

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \text{etc.},$$

donne ensuite

$$u'' = -\mu \mathrm{A} h x^n + \text{etc.};$$

d'où

$$n_2 = n, \quad h_2 = -\mu A h.$$

Ces premières valeurs sont comprises dans les formules générales

$$u^{(2q} = (-1)^q . h . A^q . C_{2q} . x^n + \text{etc.},$$
$$u^{(2q+1)} = (-1)^q . h . A^q . C_{2q+1} . x^{n-1} + \text{etc.},$$

où C_{2q}, C_{2q+1}, sont des coefficients numériques essentiellement > 0. On s'assurera que ces formules sont exactes, en recourant à l'équation

$$u^{(i+2)} = \frac{du^{(i+1)}}{dx} - (i+1)(\mu - i) P u^{(i)}.$$

Pour $i = 2q$, cette équation donne

$$u^{(2q+2)} = (-1)^{q+1} . h . A^{q+1} C_{2q} . (2q+1)(\mu - 2q) . x^n + \text{etc.};$$

d'où résulte

$$C_{2q+2} = (2q+1)(\mu - 2q) C_{2q}.$$

Pour $i = 2q + 1$, elle fournit

$$u^{(2q+3)} = (-1)^{q+1} . h . A^{q+1} . (n C_{2q+2} + (2q+2)(\mu - 2q - 1) C_{2q+1}) . x^{n-1} + \text{etc.};$$

d'où

$$C_{2q+3} = n C_{2q+2} + (2q+2)(\mu - 2q - 1) C_{2q+1}.$$

Les valeurs obtenues ainsi pour C_{2q+2} et C_{2q+3} sont positives puisque l'indice $2q + 2$ ou $2q + 3$ ne surpasse jamais $(\mu + 1)$. La loi énoncée tout-à-l'heure est donc vérifiée : il s'ensuit évidemment que l'on ne peut avoir ni $h_{\mu+1} = 0$ ni $u^{(\mu+1)} = 0$. Donc l'équation (5) n'a jamais d'intégrale algébrique.

3. Maintenant appliquons à l'équation (5) tous les raisonnements contenus dans les n^{os} **9**, **10** et **11** du Mémoire sur l'intégration des équations, déjà cité, et nous verrons que si l'équation (5) possède une intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, il faudra

nécessairement que l'équation

$$(7) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = \mathrm{P}$$

puisse être satisfaite par une valeur de la forme $t =$ *fonction algébrique de* x. D'après la remarque faite au dernier numéro du même Mémoire, ce théorème subsisterait, et une valeur de t algébrique en x devrait encore satisfaire à l'équation (7), lors même qu'aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, qui déjà sont supposés pouvoir entrer dans les fonctions finies explicites, on joindrait le signe $\int$ d'intégration indéfinie relative à la variable x. La recherche des cas où l'équation de Riccati peut s'intégrer sous forme finie en exprimant explicitement la fonction qui s'y trouve à l'aide de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes $\int$ d'intégrations relatives à la variable indépendante, se réduit donc à la recherche des cas où l'on peut trouverpour l'équation (7) une intégrale algébrique.

Mais on peut aller plus loin, car à l'aide des raisonnements contenus dans le n° **12** et dans la Note jointe au n° **13** du Mémoire sur l'intégration des équations [*], on prouve sans peine qu'une intégrale t de l'équation (7) ne peut pas être algébrique sans être en même temps rationnelle. C'est donc la détermination des intégrales rationnelles que l'équation (7) peut avoir qui doit à présent nous occuper.

4. La valeur de t que l'on cherche étant rationnelle, se composera naturellement d'une partie entière Q et d'une partie fractionnaire réductible en une série de fractions simples de la forme

$$\frac{\mathrm{G}}{(x-p)^{\gamma}},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$t = \mathrm{Q} + \sum \frac{\mathrm{G}}{(x-p)^{\gamma}}.$$

De là résulte

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \sum \frac{\alpha \mathrm{G}}{(x-p)^{\gamma+1}}.$$

---

[*] Tome IV de ce Journal, page 446.

et il faut qu'en portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 - P = 0,$$

celle-ci soit satisfaite. Mais comme son premier membre se composera, après la substitution, d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, il sera nécessaire que ces deux parties s'annullent séparément. Or la partie entière de t^2 contient, outre Q^2, un terme Q_1 provenant du double produit de Q par la partie fractionnaire de t : la partie entière de P est d'ailleurs A. On doit donc poser

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 + Q_1 - A = 0.$$

Le degré de la fonction Q_1, et par suite de $\frac{dQ}{dx} + Q_1$, est inférieur au moins d'une unité à celui de Q. L'équation précédente exige donc que Q^2 et A soient de même degré : ainsi Q ne peut être qu'une simple constante; dès lors $\frac{dQ}{dx}$ et Q_1 doivent se réduire à zéro. Par suite on a nécessairement

$$Q^2 = A, \quad Q = \pm\sqrt{A}.$$

Maintenant occupons-nous de la partie fractionnaire de t. Parmi les fractions simples qui la composent, considérons spécialement celle qui répond au diviseur $x - p$, p étant différent de zéro, et, s'il y en a plusieurs de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^\alpha},$$

attachons-nous de préférence à celle où l'exposant α est le plus grand. Dès lors les valeurs de $\frac{dt}{dx}$ et de t^2 pourront s'écrire ainsi

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}} + \frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}},$$

$$t^2 = \frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}} + \frac{M_2}{N_2(x-p)^{2\alpha-1}},$$

M_1, M_2, N_1, N_2, étant des polynomes dont les deux derniers ne sont pas divisibles par $x - p$. En les substituant dans l'équation (7), on aura

$$\frac{G^2}{(x-p)^2} - \frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}} + \frac{M_2}{N_2(x-p)^{2\alpha-1}} + \frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}} - P = 0.$$

Or 2α est au moins égal à $\alpha + 1$, et il y aurait absurdité à le supposer plus grand puisque alors la première fraction ne pourrait plus se réduire avec aucune autre; il faut donc poser $2\alpha = \alpha + 1$, c'est-à-dire $\alpha = 1$. Pour que les deux premiers termes se détruisent, G n'étant pas zéro, il faut ensuite que $G = 1$. Ainsi, abstraction faite des fractions simples dont le diviseur est monome, la quantité

$$\sum \frac{G}{(x-p)^{\alpha}}$$

est de la forme

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots\ldots + \frac{1}{x-r},$$

le nombre des fractions que nous venons d'écrire pouvant, bien entendu, se réduire à zéro.

Quant aux fractions dont le diviseur est un monome, on les mettra en évidence si l'on pose dans les calculs précédents $p = 0$, et si de plus on remplace P par sa valeur

$$A + \frac{B}{x^2}.$$

La dernière des équations obtenues plus haut devient alors

$$\frac{G^2}{x^{2\alpha}} - \frac{\alpha G}{x^{\alpha+1}} + \frac{M_2}{N_2 x^{2\alpha-1}} + \frac{M_1}{N_1 x^{\alpha}} - A - \frac{B}{x^2} = 0.$$

En prenant $\alpha > 1$, d'où $2\alpha > \alpha + 1 > 2$, on arriverait à une absurdité, puisque la première fraction ne se réduirait avec aucune autre. On doit donc poser $\alpha = 1$, et ensuite $G^2 - G = B$, pour que les termes qui ont le diviseur x^2 se détruisent. Il entre donc dans t une seule fraction de la forme $\frac{G}{x^{\alpha}}$; l'exposant α s'y trouve égal à 1, et

le numérateur G est une des racines de l'équation $G^2 - G = B$; nous désignerons cette racine par $-\beta$, ce qui suppose

$$\beta(\beta + 1) = B.$$

On voit donc [illegible] que la valeur rationnelle de t, qui peut satisfaire à l'équation (7), doit être [illegible] forme

$$t = \pm\sqrt{A} - \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r},$$

β satisfaisant, comme on l'a dit, à l'équation

$$\beta(\beta + 1) = B.$$

Puisque l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)y$$

est satisfaite par

$$y = e^{\int t\,dx},$$

nous devons en conclure que l'existence d'une telle valeur de t entraîne celle d'une valeur de y de la forme

$$y = e^{\pm x\sqrt{A}} . x^{-\beta} . Y,$$

Y étant un polynome entier

$$(x - p)(x - q) \ldots (x - r).$$

Ce polynome doit satisfaire à l'équation

$$(8) \qquad x\frac{d^2Y}{dx^2} - 2(\beta \mp x\sqrt{A})\frac{dY}{dx} \pm 2\beta\sqrt{A}.Y = 0,$$

que l'on déduit de l'équation (4) en y mettant pour y sa valeur et en remplaçant B par $\beta(\beta + 1)$.

5. Désignons par n le degré du polynome Y, et posons

$$Y = x^n + h_1 x^{n-1} + \ldots + h_i x^{n-i} + \ldots + h_n.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (8), puis égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on trouve d'abord $n = \beta$: l'égalité à zéro du coefficient de x^n, ne peut exister cette équation, qui ne peut exister que si β est un nombre entier nul ou positif. La condition dont il s'agit étant supposée remplie et l'exposant n ayant été pris égal à β, on trouve ensuite généralement

$$h_{i+1} = \mp \frac{(\beta - i)(\beta + i + 1) h_i}{2\sqrt{A}.(i+1)},$$

formule à l'aide de laquelle on déterminera les coefficients successifs $h_1, h_2, \ldots, h_n$, en partant de $h_0 = 1$, et qui fournit, comme cela doit être, une valeur nulle de $h_{\beta+1}$ ou h_{n+1}. La condition que β soit un entier nul ou positif est donc la seule nécessaire; dès qu'elle est remplie, l'équation (8) est satisfaite par le polynome

$$Y = x^n + h_1 x^{n-1} + \ldots + h_n.$$

où $n = \beta$ et dont les coefficients sont déterminés par la formule que je viens d'indiquer.

Cela fournit en général pour Y une valeur double à cause du signe $\pm$ qui affecte le radical $\sqrt{A}$. En continuant à désigner par Y le polynome qui répond au signe $+$, et désignant par Z celui qui répond au signe $-$, on aura donc cette valeur complète de y,

$$y = Ce^{x\sqrt{A}}.x^{-\beta}.Y + C'e^{-x\sqrt{A}}.x^{-\beta}.Z,$$

où C et C′ sont des constantes arbitraires. Le cas où $\beta = 0$ fait exception, mais on peut ne pas s'en occuper puisqu'on a supposé d'avance que B n'est pas nul. Dans ce cas d'ailleurs l'équation (8) se réduisant à

$$x\frac{d^2Y}{dx^2} - 2x\sqrt{A}\frac{dY}{dx} = 0,$$

s'intègre immédiatement.

6. En résumé, pour que l'équation

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)y,$$

où la constante A est supposée essentiellement différente de zéro, puisse être satisfaite en prenant pour y une fonction de x exprimable par un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes $\int$ indiquant des intégrations indéfinies relatives à la variable x, il est nécessaire et suffisant que B soit de la forme $\beta(\beta+1)$, β étant un entier nul ou positif. Cette condition étant remplie, on pourra exprimer à l'aide des signes indiqués et même à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels l'intégrale complète de l'équation (4).

Voyons ce que devient la condition précédente pour l'équation de Riccati. On a alors

$$B = -\left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \cdot \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right).$$

En remplaçant B par $\beta(\beta+1)$, ou $n(n+1)$, il vient

$$(2n+1)^2(m^2+4m) + 16n^2 + 16n = 0,$$

d'où l'on tire pour m ces deux valeurs

$$m = -\frac{4n}{2n+1}, \quad m = -\frac{4(n+1)}{2n+1},$$

dont la seconde peut être écrite ainsi

$$m = -\frac{4(n+1)}{2(n+1)-1},$$

et qui par conséquent peuvent être remplacées par la formule double si connue

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1},$$

où i désigne un nombre entier nul ou positif.

NOTE

Sur la vraie valeur des fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$:

PAR J. BERTRAND,

Elève de l'École Polytechnique.

On donne, dans les Traités de Calcul différentiel, une règle qui ramene la détermination de la vraie valeur du rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ de deux fonctions $f(x)$, $F(x)$, lorsque ces deux fonctions deviennent à la fois infinies, à la recherche de la limite du rapport de leurs dérivées. La méthode fort simple que l'on emploie consiste à écrire la fraction de telle sorte qu'au lieu de $\frac{\infty}{\infty}$ elle devienne $\frac{0}{0}$, et à appliquer alors la règle relative à ce dernier cas. On trouve ainsi

$$\lim. \frac{f(x)}{F(x)} = \lim. \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2 . \lim. \frac{F'(x)}{f'(x)};$$

et en supprimant le facteur $\lim. \frac{f(x)}{F(x)}$ il vient, comme on voulait le démontrer,

$$\lim. \frac{f(x)}{F(x)} = \lim. \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Mais cette démonstration n'est rigoureuse qu'autant qu'on est assuré d'avance que la limite cherchée n'est ni nulle ni infinie. La regle n'est pourtant pas en défaut dans ce cas; c'est ce que je me propose de faire voir en en donnant une démonstration directe qui ne sera pas sujette à la même objection. Soit a la valeur pour laquelle on a $f(a) = \infty$, $F(a) = \infty$, et admettons, comme on le fait ordinairement, que pour les valeurs de x voisines de a, mais différentes de a, les fonctions $f(x)$, $F(x)$, soient continues; en d'autres termes admettons que si x varie depuis $a + \varepsilon$ jusqu'à a, ε étant un très petit nombre, les fonctions $f(x)$, $F(x)$, varieront elles-mêmes depuis $f(a+\varepsilon)$, $F(a+\varepsilon)$

jusqu'à $f(a)$, $F(a)$ ou ∞, en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Cela posé, nous voulons trouver vers quelle limite tend la fraction

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)},$$

lorsque h tend vers zéro : au lieu de cette expression nous considérerons

$$\frac{f(a+h)-f(a+h')}{F(a+h)-F(a+h')},$$

h' étant une nouvelle quantité infiniment petite mais qui tendra vers zéro de manière à être constamment plus grande que h: on peut déterminer la loi du décroissement simultané de ces deux quantités de manière que les rapports $\frac{f(a+h')}{f(a+h)}$, $\frac{F(a+h')}{F(a+h)}$ tendent tous les deux vers zéro; car après avoir donné à h' une valeur très petite quelconque, on pourra ensuite trouver pour h une valeur telle que la somme des carrés des rapports dont il s'agit soit par exemple égale à h' et converge en conséquence vers la même limite zéro : c'est ce qu'on reconnaît en observant que si h varie depuis h' jusqu'à 0, cette somme, d'abord égale à 2 et par suite $> h'$, passe évidemment par toutes les valeurs intermédiaires entre 2 et 0. D'après cela les fractions

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}, \quad \frac{f(a+h)-f(a+h')}{F(a+h)-F(a+h')},$$

convergent vers la même limite, puisque les termes ajoutés dans la seconde, bien que croissant indéfiniment, sont infiniment petits par rapport à ceux qui étaient déjà dans la première.

Mais sous cette forme on a, d'après un théorème de M. Cauchy,

$$\frac{f(a+h)-f(a+h')}{F(a+h)-F(a+h')} = \frac{f'[a+\theta(h-h')]}{F'[a+\theta(h-h')]},$$

où θ désigne une quantité positive plus petite que 1; et l'on voit que la limite du second membre est celle du rapport des dérivées lorsque la variable indépendante tend vers la limite a.

Il y aurait quelques mots à changer si la valeur de x, qui rend les

deux fonctions infinies, était elle-même infinie; il faudrait alors considérer

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{F(x) - F(x_1)},$$

et faire croître indéfiniment x et x_1 de manière à ce que les seconds termes soient infiniment petits par rapport aux premiers.

J'ajouterai qu'il est important d'observer que bien que la règle s'applique au cas où la limite cherchée est nulle ou infinie, il ne faudrait pas croire que dans un calcul où entre une expression de cette sorte on puisse la remplacer par le rapport des dérivées. Tout ce que nous savons c'est que ce second rapport s'annulle avec le premier et est infini avec lui; mais rien ne prouve que ce soient des infiniment petits ou des infiniment grands égaux. Ainsi, pour citer un exemple fort simple, si l'on considère la fraction $\frac{x^3}{x^4}$ pour $x = \infty$, on ne peut pas la remplacer par le rapport des dérivées $\frac{3x^2}{4x^3}$, bien que ce nouveau rapport devienne infini comme le premier; la même remarque s'applique aux fractions $\frac{0}{0}$.

MÉMOIRE

SUR UNE FORMULE DE VANDERMONDE,

ET SON APPLICATION

A LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. JACOBI;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux

Présenté à l'Académie des Sciences, le 18 février 1839.

L'objet principal des pages suivantes est 1° la démonstration de l'équation identique

$$y \sum_{i=0}^{i=n} \frac{d^i A_i \frac{d^i ty}{dx^i}}{dx^i} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{d^i B_i \frac{d^i t}{dx^i}}{dx^i},$$

où A_i, y et t sont des fonctions quelconques de x, et

$$B_i (B_0, B_1, B_2, \ldots B_n)$$

des fonctions de $A_i (A_0, A_1, \ldots A_n)$, y et de leurs coefficients différentiels; 2° la recherche de la loi des fonctions B_i.

Le cas de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{d^i A_i \frac{d^i y}{dx^i}}{dx^i} = 0,$$

prise pour déterminer y, donne un théorème dont M. Jacobi a montré l'application au calcul des variations [*].

La seule difficulté de la vérification directe de l'équation identique provient du grand nombre de termes fournis par les différentiations successives de produits de deux ou trois facteurs fonctions de x. Le moyen que nous avons employé pour y remédier, nous a donné pour

[*] Voyez tome III de ce Journal, page 47.

terme général des fonctions B_i,

$$\pm M \frac{d^\alpha . A_n}{dx^\alpha} . \frac{d^\beta . y}{dx^\beta} . \frac{d^\gamma . y}{dx^\gamma},$$

(où $\frac{d^0 y}{dx^0} = y$, etc.), M étant le produit de trois coefficients binomiaux. La simplicité de ce résultat porte à croire qu'on pourrait y parvenir plus brièvement en suivant une marche moins directe.

I.

Vandermonde a donné le nom de puissance du second ordre au produit $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$, qu'il a représenté par $[x]^n$. Il a montré que la formule du binome s'étend à ces puissances; on a

$$[x+y]^n = [x]^n + n[x]^{n-1}[y] + \frac{n(n-1)}{1.2}[x]^{n-2}[y]^2 + \ldots + [y]^n.$$

Kramp a étendu cette formule aux produits

$$x.(x+r)(x+2r)\ldots[x+(n-1)r],$$

qu'il a nommés d'abord *facultés*, puis *factorielles*, et qu'il a notes ainsi $x^{n|r}$; il a démontré la formule du binome des factorielles. Les dénominations et notations de Vandermonde et de Kramp ne paraissent pas fréquemment employées.

Si l'on divise les deux membres de la formule de Vandermonde par $1.2.3\ldots n$, en remplaçant d'abord le coefficient binomial

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \text{ par } \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots n-k},$$

on aura, en conservant les notations ordinaires,

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$+ \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2\ldots n-1}.\frac{y}{1} + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2\ldots n-2}.\frac{y(y-1)}{1.2} + \ldots$$

qui ne contient plus que des coefficients binomiaux; et si pour abréger on écrit $\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{1.2\ldots k} = (a, k)$, on trouvera

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

en posant en général $(k, 0) = 1$ pour la symétrie des formules.

Cette formule et d'autres qui s'en déduisent se prêtent facilement au calcul, comme on le verra plus loin. La formule précédente, dont on trouve une démonstration fort simple dans l'analyse algébrique de M. Cauchy (page 100), est vraie pour toutes les valeurs de x et y : mais il est bon de distinguer les quantités positives des négatives : on a ainsi quatre formules

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

$$(x-y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (-1)^z (x-z, n-z)(y, z),$$

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x-z, n-z)(y-1+z, z),$$

$$(x-y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (-1)^z (x, n-z)(y-1+z, z).$$

Quand f est un nombre entier positif plus grand que l'entier positif g, la réduction au même dénominateur donne de suite $(f, g) = (f, f-g)$: ainsi quand les valeurs de x et y permettent d'employer cette transformation, on a les douze formules suivantes où les sommes sont prises depuis $z = 0$ jusqu'à $z = n$ inclusivement :

$$(x+y, n) = \sum (x, x-n+z)(y, z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x-z, x-n)(y, z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x-z, x-n)(y-1+z, z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x, n-z)(y, y-z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x-z, x-n)(y, y-z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x-z, x-n)(y-1+z, y-1),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x, n-z)(y-1+z, y-1),$$

$$(x+y, n) = \sum (x, x-n+z)(y, y-z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x-z, x-n)(y, y-z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x-z, x-n)(y-1+z, y-1).$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, y-1).$$

Ces formules en renferment beaucoup d'autres particulières. On peut voir à cet égard la note IX de l'analyse algébrique de M. Cauchy. Voici maintenant quelques applications.

II.

Pour montrer l'utilité de la formule

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

on peut prendre le problème suivant :

« Une urne contient a boules blanches et b boules noires, en tout » $c = a + b$. Il a été fait $\mu = m + n$ tirages. Quelle est pour une per- » sonne qui sait que ce nombre de tirages a été fait, mais qui ne con- » naît pas le nombre de boules blanches et de boules noires sorties, » la probabilité qu'en $\mu' = m' + n'$ nouveaux tirages, on aura m' » boules blanches et n' noires. On suppose que les boules ne sont » pas remises dans l'urne après le tirage. »

Solution. La probabilité du tirage de m boules blanches et de n noires, dans l'hypothèse indiquée, est

$$\frac{a.\,a-1\ldots(a-m+1)}{c.\,c-1\ldots(c-m+1)} \cdot \frac{b.\,b-1\ldots(b-n+1)}{(c-m)(m-1)\ldots(c-m-n+1)} \cdot \frac{1.2\ldots(m-n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$$
$$= \frac{(a, m)(b, n)}{(c, \mu)}.$$

Comme il reste dans l'urne $a-m$ boules blanches et $b-n$ boules noires, en tout $c-\mu$, la probabilité du tirage de m' boules blanches et de n' boules noires sera $\frac{(a-m, m')(b-n, n')}{(c-\mu, \mu')}$, en supposant m et n connus. Mais si m et n sont inconnus, qu'on sache seulement que $m+n=\mu$, la probabilité cherchée sera la somme des valeurs que prend la probabilité composée $\frac{(a, m)(b, n)}{(c, \mu)} \times \frac{(a-m, m')(b-n, n')}{(c-\mu, \mu')}$ quand on y suppose successivement

$$m=0, \quad n=\mu; \quad m=1, \quad n=\mu-1; \quad m=2, \quad n=\mu-2; \quad \ldots \quad m=\mu, \quad n=0.$$

Mais, par une simple permutation dans l'ordre des facteurs, on a

$$\frac{(a, m)(b, n)}{(c, \mu)} \cdot \frac{(a-m, m')(b-n, n')}{(c-\mu, \mu')} = \frac{(a, m')(b, n')}{(c, \mu')} \times \frac{(a-m', m)(b-n', n)}{(c-\mu', \mu)};$$

la probabilité cherchée égalera donc

$$\frac{(a, m')(b, n')}{(c, \mu')} \sum_{z=0}^{z=n} \frac{(a-m', \mu-z)(b-n', z)}{(c-\mu', \mu)}.$$

Si donc on fait dans la formule

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

$x=a-m'$, $y=b-n'$ et $n=\mu$, d'où $(x+y, n) = (c-\mu', \mu)$,

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{(a, m')(b, n')}{(c, \mu')},$$

c'est-à-dire sera la même que si aucun tirage n'avait été fait avant les μ derniers.

Le même problème, pour le cas particulier de $n'=0$, a été résolu par M. Mondesir, à la page 3 du deuxième volume de ce Journal.

III.

Pour montrer l'usage de la formule

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x-z, n-z)(y, z),$$

on peut prendre le problème suivant :

« Deux personnes jouent à qui gagnera le premier un certain nombre » de points; elles sont d'égale force et cessent le jeu avant la fin de la » partie. Il manque à la première p points et à la seconde q points pour » avoir gagné. Comment les joueurs doivent-ils se partager l'enjeu ? »

Solution. Soit $\Phi(p, q)$ la part de l'enjeu 1 qui revient au joueur A auquel il manque p points, tandis qu'il en manque q à son adversaire B; s'il se joue encore un coup qui procure à l'un des joueurs le gain d'un point, la part du joueur A deviendra $\Phi(p-1, q)$ s'il gagne le point, et $\Phi(p, q-1)$ s'il le perd. Or l'un est aussi probable que l'autre, puisque les joueurs sont d'égale force; il faut donc prendre, pour déterminer la fonction $\Phi(p, q)$, l'équation

$$\Phi(p, q) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-1, q) + \tfrac{1}{2}\Phi(p, q-1),$$

en remarquant que d'après les conditions du jeu p et q sont des entiers positifs et qu'on a $\Phi(0, q) = 1$, $\Phi(p, 0) = 0$.

D'après cela on trouve

$$\Phi(p, 1) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-1, 1) + \tfrac{1}{2}\Phi(p, 0) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-1, 1);$$

et par conséquent

$$\Phi(p-1, 1) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-2, 1), \quad \Phi(p-2, 1) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-3, 1), \text{ etc.},$$
$$\Phi(2, 1) = \tfrac{1}{2}\Phi(1, 1), \quad \Phi(1, 1) = \tfrac{1}{2};$$

d'où par élimination $\Phi(p, 1) = \frac{1}{2^p}$.

Par un calcul tout semblable, on trouvera

$$\Phi(p, 2) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-1, 2) + \tfrac{1}{2}\Phi(p, 1) = \tfrac{1}{2}\Phi(p-1, 2) + \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Ainsi l'on a la suite d'équations

$$\begin{aligned}
\Phi(p, 2) &= \tfrac{1}{2}\Phi(p-1, 2) + \frac{1}{2^{p+1}},\\
\Phi(p-1, 2) &= \tfrac{1}{2}\Phi(p-2, 2) + \frac{1}{2^{p}},\\
\Phi(p-2, 2) &= \tfrac{1}{2}\Phi(p-3, 2) + \frac{1}{2^{p-1}},\\
&\vdots\\
\Phi(1, 2) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2};
\end{aligned}$$

d'ou, par élimination,

$$\Phi(p, 2) = \frac{p}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^p}.$$

On trouvera semblablement

$$\Phi(p, 3) = \frac{(p+1)\cdot p}{1.2}\cdot\frac{1}{2^{p+2}} + \frac{p}{1}\cdot\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^p},$$

$$\Phi(p, 4) = \frac{(p+2)(p+1)\cdot p}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^{p+3}} + \frac{p+1\cdot p}{1.2}\cdot\frac{1}{2^{p+2}} + \frac{p}{1}\cdot\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^p}.$$

et généralement

$$\Phi(p, q) = (p+q-2, q-1)\cdot\frac{1}{2^{p+q-1}} + (p+q-3, q-2)\cdot\frac{1}{2^{p+q-2}} + \ldots$$
$$+ (p, 1)\cdot\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^p}.$$

Jacques Bernoulli a donné dans l'*Ars conjectandi*, la formule

$$\Phi(p, q) = \frac{1}{2^{p+q-1}}\left[1 + (p+q-1, 1) + (p+q-1, 2) + \ldots (p+q-1, q-1)\right],$$

qui se tire facilement de la remarque que la partie sera nécessairement finie après $p+q-1$ coups au plus.

On peut au reste ramener la première forme de $\Phi(p, q)$ à la seconde ainsi qu'il suit. La première forme peut s'écrire

$$\frac{1}{2^{p+q-1}}\left[(p+q-2, q-1) + 2.(p+q-3, q-2) + 2^2.(p+q-4, q-3) + \ldots 2^{q-1}\right]$$

mais on a en général

$$2^a = (1+1)^a = (a, 0) + (a, 1) + (a, 2) + \ldots + (a, a).$$

La quantité entre parenthèses deviendra donc, en renversant l'ordre des termes,

$$\begin{aligned}
&(q-1, 0) + (q-1, 1) + (q-1, 2) + (q-1, 3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (q-1, z) + \ldots \\
&\quad (p, 1)(q-2, 0) + (p, 1)(q-2, 1) + (p, 1)(q-2, 2) + \ldots\ldots\ldots + (p, 1)(q-2, z-1) + \ldots \\
&\qquad (p+1, 2)(q-3, 0) + (p+1, 2)(q-3, 1) + \ldots + (p+1, 2)(q-3, z-2) + \ldots \\
&\qquad\qquad + (p+2, 3)(q-4, 0) + \ldots + (p+2, 3)(q-4, z-3) + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad + (p+1+z, z)(q-z, 0) + \ldots
\end{aligned}$$

Or la dernière colonne pouvant s'écrire

$$\sum_{i=0}^{i=z} (q-1-i, z-i)(p-1+i, i),$$

deviendra $(p+q-1, z)$, en vertu de la formule

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x-z, n-z)(y-1+z, z),$$

ou il suffit de faire $x = q-1$, $y = p$, $n = z$. Il résulte de là

$$(2p, q) = \frac{1}{2^{p+q-1}}\left[1 + (p+q-1, 1) + (p+q-2, 2) + \ldots (p+q-1, q-1)\right],$$

ce qui est la formule de Bernoulli.

IV.

Pour montrer l'utilité de la formule

$$(x-y, n) = \sum_{z=0} (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, z),$$

on peut prendre le théorème suivant :

« *Théorème.* Soient $A_0, A_1, \ldots A_n$, ainsi que y et t, des fonctions » quelconques de x; on aura toujours (en employant la notation de » Lagrange)

$$\left.\begin{aligned} y\{A_0(ty) + A[A_1(ty)']' + [A_2(ty)'']'' + \ldots + [A_n(ty)^{(n)}]^{(n)}\} \\ = B_0 t + (B_1 t')' + (B_2 t'')'' + \ldots + [B_n t^{(n)}]^{(n)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

En considérant t comme constant, on a de suite

$$B_0 = y\{A_0 y + (A_1 y')' + (A_2 y'')'' + \ldots + [A_n y^{(n)}]^{(n)}\};$$

et si l'on pose

$$A_0 y + (A_1 y')' + (A_2 y'')'' + \ldots + [A_n y^{(n)}]^{(n)} = 0.$$

il en résulte $B_0 = 0$. Dans ce cas l'on a un théorème dû à M. Jacobi, et dont il a montré l'application au calcul des variations (Journal de M. Crelle, tome XVII, page 71, et *Journal de Mathématiques*, tome III, page 44). L'illustre auteur a trouvé la loi des fonctions B; j'ignore s'il l'a publiée, c'est pourquoi je vais l'exposer ici.

N. B. Dans les calculs suivants il n'entrera que des termes de la forme $MA_i^{(\alpha)} y^{(\beta)}$ ou $MA_i^{(\alpha)} y^{(\beta)} . y^{(\gamma)}$, dans lesquels M est un coefficient numérique, et

$$A_i^{\alpha} = \frac{d^{\alpha} A_i}{dx^{\alpha}}, \quad y^{(\beta)} = \frac{d^{\beta} y}{dx^{\beta}}, \quad y^{(\gamma)} = \frac{d^{\gamma} y}{dx^{\gamma}}.$$

On pourra sans inconvénient omettre les parentheses et écrire y^{α} au lieu de $y^{(\alpha)}$ les exposants désignant un nombre d'accents. En faisant cette convention il faudra avoir bien soin d'écrire $y^{(\beta)} . y^{(\beta)} = y^{\beta} . y^{\beta}$ et non $= y^{2\beta}$. Il faut encore se rappeler que y^0 signifiera $y = \frac{d^0 y}{dx^0}$, et bien se garder de faire $y^0 = 1$, comme si 0 était un exposant.

Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} y(C_0 t + C_1 t' + C_2 t'' + \ldots + C_{2n} t^{2n}) = B_0 t \\ + (B_1 t')' + (B_2 t'')'' + \ldots + [B_n t^{(n)}]^{(n)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ou plus simplement, en posant

$$\left.\begin{array}{l} D_0 = C_0 y, \quad D_1 = C_1 y, \quad D_2 = C_2 y, \ldots D_{2n} = C_{2n} y, \\ D_0 t + D_1 t' + D_2 t'' + \ldots + D_{2n} t^{(2n)} = B_0 t + (B_1 t')' + \ldots + [B_n t^{(n)}]^{(n)}, \end{array}\right\} \quad (3)$$

il faudra d'abord calculer les fonctions C et D au moyen de l'équation

$$\left.\begin{array}{r} A_0 t y + [A_1 (ty)']' + [A_2 (ty)'']'' + \ldots + [A_n (ty)^{(n)}]^{(n)} \\ = C_0 t + C_1 t' + C_2 t'' + \ldots + C_{2n} t^{(n)}, \end{array}\right\} \quad (4)$$

puis tirer de l'équation (3) les fonctions B ainsi qu'il suit : on a d'abord $B_0 = D_0$, et l'équation (3) se réduit à

$$D_1 t' + D_2 t_2 + \ldots + D_{2n} t^{(2n)} = (B_1 t')' + (B_2 t'')'' + \ldots + [B_n t^{(n)}]^{(n)}.$$

Comme le second membre est une dérivée exacte il faudra avoir la condition

$$D_1 - D_2' + D_3'' - \ldots - D_{2n}^{(2n-1)} = 0;$$

passant à l'équation primitive il viendra

$$\begin{array}{r} [D_2 - D_3' + \ldots + D_{2n}^{(2n-2)}] t' + [D_3 - D_4' + \ldots - D_{2n}^{(2n-3)}] t'' + \ldots \\ = B_1 t' + (B_2 t'')' + \ldots \end{array}$$

Cette équation donne

$$B_1 = D_2 - D_3' + D_4'' + \ldots + D_{2n}^{(2n-1)}.$$

Ensuite l'équation

$$\begin{array}{r} [D_3 - D_4' + \ldots - D_{2n}^{(2n-3)}] t'' + [D_4 - D_5' \ldots + D_{2n}^{(2n-4)}] t''' + \ldots \\ = (B_2 t'')' + (B_3 t''')'' \ldots, \end{array}$$

ayant pour second membre une dérivée exacte, donnera l'équation de condition

$$D_3 - 2D_4' + 3D_5'' - \ldots - (2n-2) D_{2n}^{(2n-3)} = 0,$$

et comme la primitive est

$$[D_4 - 2D_5' + 3D_6'' \ldots + (2n-3) D_{2n}^{(2n-4)}] t'' + \ldots = B_2 t'' + (B_3 t''')' + \ldots,$$

on aura

$$B_2 = D_4 - 2D'_6 + 3D''_6 - \ldots + (2n-3)\,D^{(2n-4)}_{2n}.$$

Continuant de même, on trouvera pour la formule des équations de condition

$$\left.\begin{aligned} 0 = D_{2a-1} &- (a, 1)\,D'_{2a} + (a+1, 2)\,D''_{2a+1} \ldots \\ &- (2n-a, 2n-2a+1)\,D^{(2n-2a+1)}_{2n}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

et pour formule des fonctions B,

$$\left.\begin{aligned} B_a = D_{2a} &- (a, 1)\,D'_{2a+1} + (a+1, 2)\,D_{2a+2} \ldots \\ &+ (2n-a-1, 2n-2a)\,D^{2n-2a}_{2n}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

qui se tire de l'équation de condition, en y augmentant les indices des fonctions D de l'unité.

Si nous posons en général

$$(D, b, a) = D_b - (a, 1)\,D'_{b+1} + (a+1, 2)\,D''_{b+2} - \ldots \quad (7)$$

en terminant le second membre au terme renfermant D_{2n}, il suffira de prouver que pour $b = 2a-1$ on a $(D, b, a) = 0$, et de calculer (D, b, a) pour $b = 2a$, ce qui donnera B_a.

Le calcul de la fonction (D, b, a) se simplifiera au moyen de la remarque suivante. Comme les équations (5) doivent être satisfaites, quelles que soient les fonctions A et qu'elles sont formées de termes tels que $MA_i^{\alpha}\, y^{\beta}\, y^{\gamma}$, où ne se trouve point A_0 qui n'entre que dans B_0, on voit que tous les termes en A_1 doivent se détruire entre eux, qu'il en doit être de même pour ceux en A_2, pour ceux en A_3, et ainsi de suite. Il suffira donc de vérifier les équations (5) pour le cas où l'équation (1) se réduirait à

$$(1') \qquad y\{A_0 ty + [A_i(ty)^{(i)}]^{(i)}\} = B_0 t + (B_1 t')' + \ldots$$

De même encore, si dans ce cas, on calcule les fonctions B_a données par les équations (6), la somme des valeurs de B_a relatives à $i = 1, 2, 3 \ldots n$, donnera la valeur de B_a pour le cas de l'équation (1).

Cela posé, si dans la fonction (D, b, a) relative à l'équation (1'), on

remplace D_k par sa valeur $C_k y$, on obtiendra

$$\begin{aligned}(D, b, a) = {} & [C_b - (a, 1) C'_{b+1} + (a+1, 2) C''_{b+2} - \ldots] y, \\ & - (a, 1) [C_{b+1} - (a+1, 1) C'_{b+2} + (a+2, 2) C''_{b+3} \ldots] y', \\ & + (a+1, 2) [C_{b+2} - (a+2, 1) C'_{b+3} + (a+3, 2) C''_{b+4} \ldots] y'', \\ & \text{etc.},\end{aligned}$$

chaque quantité entre parenthèses devant finir par le terme contenant C_{2i} et la dernière de ces quantités se réduisant au seul terme C_{2i}.

On peut donc prendre pour terme général de (D, b, a) l'expression

$$(-1)^{\beta} (a+\beta-1, \beta) \left[\begin{array}{l} C_{b+\beta} - (a+\beta, 1) C'_{b+\beta+1} \\ \qquad + (a+\beta+1, 2) C''_{b+\beta+2} - \ldots \end{array} \right] y^{\alpha}.$$

Pour la transformer nous ferons $b + \beta = c$, $a + \beta = d$, et la quantité entre parenthèses deviendra

$$\begin{aligned} & C_c - (d, 1) C'_{c+1} + (d+1, 2) C''_{c+2} - \ldots \\ & \qquad = f_0 y + f_1 y' + f_2 y'' + \ldots + f_\alpha y^\alpha + \ldots \end{aligned}$$

Pour calculer le coefficient f_α il faut réduire C_c, C'_{c+1}, C''_{c+2}, etc., aux seuls termes contenant y^α.

Or si l'on remarque que le terme général de $[A_i (ty)^{(i)}]^{(i)}$ est $(i, z) A_i^{(i-z)} . (ty)^{(i+z)}$, et que le terme général de $(ty)^{(i+z)}$ est $(i+z, k) y^{(i+z-k)} t^{(k)}$, on trouvera pour terme général du coefficient C_k (i, z) $(i+z, k)$ $A_i^{i-z} . y^{i+z-k}$, et pour avoir la partie renfermant les termes en y^α, il faudra faire $i + z - k = \alpha$; d'où

$i, \alpha + k - i) (\alpha + k, k) A_i^{2i-k-\alpha} y^\alpha$. On aura donc

$$\begin{aligned} C_c = {} & \ldots + (i, \alpha + c - i) (\alpha + c, c) A_i^{2i-c-\alpha} y^\alpha \ldots, \\ C_{c+1} = {} & \ldots + (i, \alpha + c - i) (\alpha + c, c+1) A_i^{2i-c-\alpha} y^{\alpha-1} \\ & + (i, \alpha + c + 1 - i) (\alpha + c + 1, c+1) A_i^{2i-c-1-\alpha} y^\alpha \ldots, \\ C_{c+2} = {} & \ldots + (i, \alpha + c - i) (\alpha + c, c+2) A_i^{2i-c-\alpha} y^{\alpha-2} \\ & + (i, \alpha + c + 1 - i) (\alpha + c + 1, c+2) A_i^{2i-c-1-\alpha} y^{\alpha-1} \\ & + (i, \alpha + c + 2 - i) (\alpha + c + 2, c+2) A_i^{2i-c-2-\alpha} y^\alpha \ldots \end{aligned}$$

etc.

Ces équations peuvent se disposer ainsi :

$$\begin{aligned}
K\,A_i^{\lambda}\,y^{\alpha} &= C_c,\\
L\,A_i^{\lambda}\,y^{\alpha} + L'A_i^{\lambda-1}\,y^{\alpha-1} &= C_{c+1},\\
M\,A_i^{\lambda}\,y^{\alpha} + M'A_i^{\lambda-1}\,y^{\alpha-1} + M''A_i^{\lambda-2}\,y^{\alpha-2} &= C_{c+2},\\
NA_i^{\lambda}\,y^{\alpha} + N'A_i^{\lambda-1}\,y^{\alpha-1} + N''A_i^{\lambda-2}\,y^{\alpha-2} + N'''A_i^{\lambda-3}\,y^{\alpha-3} &= C_{c+3}.
\end{aligned}$$

Dans les développements de C'_{c+1}, C''_{c+2}, etc., on voit que pour les termes formant la diagonale supérieure du tableau précédent, en prenant les fonctions dérivées, il faudra faire tomber tous les accents sur y; que pour les termes formant la diagonale immédiatement inférieure, il faudra faire tomber un accent sur A_i et tous les autres sur y, et ainsi de suite. D'après la règle pour trouver le développement de $[A_i^{\lambda}\,y^{\alpha}]^{\nu}$, on voit qu'il s'introduira des coefficients binomiaux comme multiplicateurs.

Ainsi la partie du coefficient de $A_i^{2i-c-\alpha}\,y^{\alpha}$ qui provient de la diagonale supérieure est égale à

$$(i, \alpha+c-i)\,[(\alpha+c, c) - (d, 1)(\alpha+c, c+1) + (d+1, 2)(\alpha+c, c+2 \ldots];$$

et comme la diagonale renferme $\alpha+1$ termes la quantité entre parenthèses sera

$$\sum_{z=0}^{z=\alpha} (-1)^z (\alpha+c, c+z)(d-1+z, z);$$

mais on a

$$(x-y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, z);$$

il suffira donc de faire $n=\alpha$, $x=\alpha+c$, $y=d$, et l'on aura pour somme $(\alpha+c-d, \alpha)$; la première partie du coefficient de $A^{2i-c-\alpha}\,y^{\alpha}$ est donc $(i, \alpha+c-i)(\alpha+c-d, \alpha)$.

Pour la partie du coefficient relative à la diagonale immédiatement inférieure, il faudra d'abord augmenter c de l'unité; puis en raison des facteurs $-(d, 1)$, $+(d+1, 2)$, $-(d+2, 3)$, $+\ldots$

multipliés respectivement par les facteurs

$$1, \quad (2, 1), \quad (3, 1), \quad \text{etc.},$$

introduits par les dérivations, ce qui donne la suite

$$-(d, 1), \quad +(d, 1)(d+1, 1), \quad -(d, 1)(d+1, 2), \quad +\ldots$$

on voit qu'il faudra encore changer d en $d+1$, et de plus introduire le facteur $-(d, 1)$, ce qui donne le second coefficient partiel

$$-(d, 1)(i, \alpha+c+1-i)(\alpha+c-d, \alpha),$$

où le dernier facteur est resté le même.

On trouvera semblablement pour troisième coefficient partiel

$$(d+1, 2)(i, \alpha+c+2-i)(\alpha+c-d, \alpha),$$

et ainsi de suite.

Maintenant si l'on remarque que dans chaque verticale du tableau des valeurs de C_c, C_{c+1}, C_{c+2}, etc., le dernier terme renferme A_i, le supérieur contenant $A_i^{2i-c-\alpha}$, il y aura pour le terme en $A_i^{2i-c-z}\,y^z$ un nombre $2i-c-\alpha+1$ de coefficients partiels formant la somme

$$(\alpha+c-d, \alpha)\,[(i, \alpha+c-i)-(d, 1)(i, \alpha+c+1-i)+(d+1, 2)(i, \alpha+c+2-i)-\ldots]$$

$$= (\alpha+c-d, \alpha) \sum_{z=0}^{z=2i-c-\alpha} (-1)^z (i, \alpha+c-i+z)(d-1+z, z).$$

Or si dans la formule

$$(x-y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, z),$$

on fait $x=i$, $y=d$, $n=2i-c-\alpha$, on trouvera pour la somme précédente $(i-d, 2i-c-\alpha)$, et pour coefficient total

$$(\alpha+c-d, \alpha)(i-d, 2i-c-\alpha).$$

Multipliant par $(-1)^\beta(a+\beta-1, \beta)$ et remplaçant c et d par leurs valeurs $b+\beta$, $a+\beta$, on aura

$$(-1)^\beta(a+\beta-1, \beta)(b-a+\alpha, \alpha)(i-a-\beta, 2i-b-\alpha-\beta)\,A_i^{2i-b-\alpha-\beta}\,y^\alpha\,y^\beta.$$

Pour le terme général de (D, b, a) relativement à l'équation (1').

Si l'on change α en β, l'accent de A_i ne change pas, de sorte que les termes en $y^{\alpha}.y^{\beta}$ et $y^{\beta}.y^{\alpha}$ ne diffèrent que par le coefficient numérique. Le terme en $y^{\beta}.y^{\alpha}$ est donc

$$(-1)^{\alpha}(a+\alpha-1,\alpha)(b-a+\beta,\beta)(i-a-\alpha,2i-b-\alpha-\beta)A_i^{2i-b-\alpha-\beta}y^{\beta}y^{\alpha}.$$

Ces deux termes peuvent donc se réduire en un seul $QA_i^{2i-b-\alpha-\beta}y^{\alpha}y^{\beta}$, en supposant

$$\left.\begin{aligned}Q=&(-1)^{\alpha}(a+\alpha-1,\alpha)(b-a+\beta,\beta)(i-a-\alpha,2i-b-\alpha-\beta)\\&+(-1)^{\beta}(a+\beta-1,\beta)(b-a+\alpha,\alpha)(i-a-\beta,2i-b-\alpha-\beta).\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Il reste à montrer que pour $b=2a-1$ on a $Q=0$, et à calculer Q pour $b=2a$.

Vérification des équations (5), *ou démonstration du théorème de M. Jacobi.*

Si dans la valeur de Q donnée par l'équation (9) on fait $b=2a-1$, d'où $b-a=a-1$, on aura

$$Q=(a+\alpha-1,\alpha)(a+\beta-1,\beta)[(-1)^{\alpha}(i-a-\alpha,2i-b-\alpha-\beta)+(-1)^{\beta}(i-a-\beta,2i-b-\alpha-\beta)].$$

Représentons par h le nombre d'accents de A_i, savoir $2i-2a+1-\alpha-\beta$; écrivons de plus p et q au lieu de $i-a-\alpha$ et $i-a-\beta$, c'est-à-dire posons les équations

$$i-a-\alpha=p,\quad i-a-\beta=q,\quad p+q=h-1;$$

le facteur de Q entre parenthèses deviendra

$$(-1)^{\alpha}(p,h)+(-1)^{\beta}(q,h),$$

quantité toujours nulle. En effet, si les deux nombres p, q sont positifs, ils seront toujours moindres que h, et dès lors on aura $(p,h)=0$, $(q,h)=0$, d'où $Q=0$. Le cas où l'un des nombres p, q est nul, et celui où p et q sont tous deux nuls, conduisent à la même conséquence.

Si des deux nombres p et q l'un est positif et l'autre négatif, en supposant $\alpha < \beta$ on aura $\quad p > 0, \quad q < 0.$

Soit donc $\qquad q = -q', \quad$ d'où $\quad p - h + 1 = q',$

il en résultera

$$(p, h) = \frac{p.(p-1)(p-2)\ldots q'}{1.2\ldots h} = \frac{q'.(q'+1)\ldots q'+h-1}{1.2\ldots h}$$
$$= (-1)^h(-q', h) = (-1)^h(q, h);$$

on aura par suite

$$(-1)^\alpha(p, h) + (-1)^\beta(q, h) = (q, h)\left[(-1)^{\alpha+h} + (-1)^\beta\right].$$

Or l'équation $2(i-a) + 1 = (\alpha + h) + \beta$ montre que des nombres $\alpha + h$, β, l'un est pair et l'autre impair; on a donc toujours

$$(-1)^{\alpha+h} + (-1)^\beta = 0,$$

et par suite $Q = 0$. Les équations de condition (5) sont donc satisfaites et le théorème se trouve démontré.

Loi des fonctions B, *terme général.*

Faisons $b = 2a$ dans (D, b, a), nous aurons la fonction B_a, dont le terme général sera $QA_i^h y^\alpha y^\beta$, où $h = 2i - 2a - \alpha - \beta$, et

$$\left.\begin{aligned} Q = &(-1)^\alpha(a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta, \beta)(i-a-\alpha, h) \\ &+ (-1)^\beta(a+\beta-1, \beta)(a+\alpha, \alpha)(i-a-\beta, h), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

en supposant α différent de β; mais pour $\alpha = \beta$, on a

$$Q = (-1)^\alpha(a+\alpha-1, \alpha)(a+\alpha, \alpha)\left(\tfrac{1}{2}h, h\right), \qquad (11)$$

toujours nul si h surpasse 0. Mais si $h = 0$, on a

$$\left(\tfrac{1}{2}h, h\right) = (0, 0) = 1, \quad i = a + \alpha \quad \text{et} \quad Q = (-1)^{i-a}(i-1, i-a)(i, i-a).$$

Dans le cas où α et β sont différents, Q est susceptible de simplification. Posons en effet $i - a - \alpha = p$, $i - a - \beta = q$, d'où $p + q = h$. Si p et q sont positifs, ils seront nécessairement moindres que h, et l'on aura $(p, h) = 0$, $(q, h) = 0$, d'où $Q = 0$. Mais si l'on a $p > 0$, $q < 0$.

ce qui suppose $\alpha < \beta$, en posant $q = -q'$, q' sera positif et l'on aura $p - q' = h$, d'où l'on tirera, comme plus haut,

$$(q, h) = (-q', h) = \frac{-q'(-q'-1)(-q'-h+1)}{1.2\ldots h} = (-1)^h \cdot \frac{q'(q'+1)\ldots(p-1)}{1.2\ldots h}$$

$$= (-1)^h (p-1, h) = (-1)^h \cdot \frac{-q}{p}(p, h).$$

D'ailleurs

$$(a+\alpha, \alpha) = \frac{\alpha+a}{\alpha+a}(a+\alpha-1, \alpha),$$

$$(a+\beta, \beta) = \frac{\beta+a}{a}(a+\beta-1, \beta),$$

d'où résulte

$$Q = (a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta-1, \beta)(p, h)\left[(-1)^{\alpha}\frac{\beta+a}{a} - (-1)^{\beta+h}\frac{\alpha+a}{a}\cdot\frac{q}{p}\right].$$

Mais l'équation $2(i-a) = \alpha + (\beta + h)$ montre que α et $\beta + h$ sont tous deux pairs ou tous deux impairs, ainsi $(-1)^{\alpha} = (-1)^{\beta+h}$; d'ailleurs

$$\frac{\beta+a}{a} - \frac{q}{p}\frac{\alpha+a}{a} = \frac{i(\beta-\alpha)}{ap};$$

donc enfin

$$Q = (-1)^{\alpha}\frac{i(\beta-\alpha)}{ap}(a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta-1, \beta)(p, h). \quad (12)$$

Cette formule convient aussi au cas de $q = 0$, pour lequel $p = h$; car il est très facile de la ramener à

$$Q = (-1)^{\alpha}(\alpha+a-1, \alpha)(\beta+a, \beta),$$

qui résulte directement des suppositions $q = 0$, $p = h$.

Pour le cas de $a = 0$, l'équation (10) montre que Q est nul, sauf les cas de $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$, ou $\alpha = \beta = 0$, pour lesquels $Q = (i, h)$; c'est ce qui résulte d'ailleurs du calcul de $D_0 = C_0\gamma$.

Exemple. Soit l'équation du sixième ordre

$$\{A_0 ty + [A_1(ty)']' + [A_2 ty'']'' + [A_3 ty''']'''\} = B_0 t + B_1 t' + B_2 t'' + B_3 t'''$$

Pour avoir B_3, comme $a = 3$, l'équation

$$2(i - a) = h + \alpha + \beta,$$

où les données sont i et a et les inconnues h, α et β qui doivent être des entiers positifs tels qu'on ait $\alpha <$ ou $= i - a$, $\beta =$ ou $> i - a$. montre qu'il faut poser $i = 3$, ce qui donne $h = \alpha = \beta = 0$, d'où $Q = 1$; on aura donc

$$B_3 = A_3 y y = A_3 y^2.$$

Pour avoir B_2, on fera $a = 2$ dans l'équation $2(i - a) = h + \alpha + \beta$; on ne peut donc prendre que $i = 2$ ou $i = 3$. D'abord $i = 2$ donne le terme $A_2 y^2$, comme on l'a vu plus haut; puis, pour $i = 3$, l'équation $2 = h + \alpha + \beta$ donne trois solutions :

1re solution	$2 = 0 + 0 + 2$,	$Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} (3,2) = 9 \ldots$	$9A_3 y y''$;
2e solution	$2 = 0 + 1 + 1$,	$Q = -(2,1)(3,1) = -6 \ldots$	$-6A_3 y' y'$;
3e solution	$2 = 1 + 0 + 1$,	$Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} (2,1)(1,1) = 3 \ldots$	$3A_3 y y'$.

On a donc trois nouveaux termes en A_3, et en tout

$$B_2 = A_2 y^2 + 9A_3 y y'' - 6A_3 y' y' + 3A_3 y y'.$$

Enfin, pour avoir B_1 on posera $a = 1$, et l'équation

$$2(i - 1) = h + \alpha + \beta,$$

pour $i = 1$, où $h = \alpha = \beta = 0$, donnera le terme $A_1 y^2$ $(0 = h + \alpha + \beta)$.

La même équation pour $i = 2$ devenant $2 = h + \alpha + \beta$, donne les trois solutions 0, 0, 2; 0, 1, 1; 1, 0, 1, auxquelles répondent $Q = 4$, $Q = -2$, $Q = 2$, et par suite les trois termes

$$4A_2 y y'' - 2A_2 y' y' + 2A_2 y y'.$$

Enfin, pour $i = 3$, l'équation $4 = h + \alpha + \beta$ a six solutions

h,	α,	β,	
0,	0,	4,	$Q = +3 \cdot \frac{4}{2} (0,0)(4,4)(2,0) = 6$,
0,	1,	3,	$Q = -3 \cdot \frac{2}{1} (1,1)(3,3)(1,0) = -6$,
0,	2,	2,	$Q = +(2,2)(3,2)(0,0) = 3$,
1,	0,	3,	$Q = +3 \cdot \frac{1}{2} (1,1)(3,3)(2,1) = 9$,
1,	1,	2,	$Q = -3 \cdot \frac{1}{1} (1,1)(2,2)(1,1) = -3$,
2,	0,	2,	$Q = +3 \cdot \frac{2}{2} (0,0)(2,2)(2,2) = 3$;

de la résultent les termes

$$6A_3 y' y''' - 6A_3 y' y'' + 3A_3 y'' y'' + 9A_3' y' y'' - 3A_3' y' y' + 3A_3'' y' y''.$$

de sorte qu'on aura pour valeur complète

$$\begin{aligned} B_1 = A_1 y' + 4A_2 y' y'' - 2A_2 y' y' + 2A_2' y' y' + 6A_3 y' y''' - 6A_3 y' y'' \\ + 3A_3 y'' y'' + 9A_3' y' y'' - 3A_3' y' y' + 3A_3'' y' y' \end{aligned}$$

Quant à

$$B_0 = y[A_0 y + A_1 y' y' + A_2 y' y'' + A_3 y' y''],$$

son terme général est $\quad i, \alpha - i \, A_i^{(\alpha - i)} y' y^{\alpha}$,

et l'on a

$$\begin{aligned} B_1 = A_1 y' + A_1 y' y' + A_2 y' y' + A_2 y' y''' + 2A_2 y' y'' + A_2' y' y' + A_2' y' y'' \\ + 3A_3 y' y' + 3A_3'' y' y'' + A_3''' y' y' \end{aligned}$$

On voit donc que toute la solution se réduit à celle de l'équation indéterminée $2(i-\alpha) = h + \alpha + \beta$, où α ne surpasse pas β, et au calcul de Q, qui résulte de la multiplication de coefficients binomiaux par les formules (10) et (11), et plus simplement par la formule (12), si α et β sont différents.

Sur l'intégrale $\int_0^\pi \cos i(u - x \sin u)\,du$;

PAR J. LIOUVILLE.

En désignant par z cette intégrale où le nombre i est supposé entier positif, et qui se présente dans les recherches de mécanique céleste, on obtient aisément l'équation connue

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} - i^2 (1 - x^2) z = 0 :$$

en faisant $y = z\sqrt{x}$ on trouvera ensuite

$$(a) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{4i^2 - 1}{4x^2} - i^2\right) y.$$

L'équation (a) est comprise comme cas particulier dans l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right) y,$$

que j'ai considérée dans les premières pages de ce volume. Pour que l'intégrale représentée par y pût s'exprimer sous forme finie en fonction de x, à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, il faudrait donc que l'on eût

$$\frac{4i^2 - 1}{4} = \beta(\beta + 1), \quad \text{ou} \quad i = \pm\left(\beta + \frac{1}{2}\right).$$

β étant un nombre entier nul ou positif. Or cette condition n'est jamais remplie, i étant aussi un nombre entier. On sait, du reste, qu'il est facile de développer y en série convergente.

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES ISOSTATIQUES

DANS LES CORPS SOLIDES HOMOGÈNES EN ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ;

PAR G. LAMÉ.

Les géomètres qui se sont occupés de la théorie des corps élastiques ont trouvé les relations qui existent entre les pressions autour de chaque point d'un corps solide, soumis à des efforts extérieurs. Mais ces propriétés ne sont pas les seules que l'on puisse déduire des équations différentielles qui représentent l'équilibre intérieur et les petits mouvements d'un corps solide, car elles se bornent à considérer les variations des pressions autour d'un point; elles démontrent, par exemple, que toutes ces forces, obliques en général sur les éléments plans qu'elles sollicitent, sont facilement déterminées, tant en grandeur qu'en direction, lorsqu'on connaît les directions et les intensités de trois pressions principales, lesquelles s'exercent au même point, normalement à trois éléments plans orthogonaux entre eux. Or, lorsqu'on passe d'un point à un autre du même corps solide, la direction et la grandeur des pressions principales varient en général, et les lois de ces variations sont nécessairement comprises implicitement dans les équations différentielles de la question. Personne, que je sache, n'a encore entrepris de développer ces lois, ou de les transformer en d'autres dont l'énoncé puisse facilement se prêter aux applications. Tel est le but que je me suis proposé d'atteindre dans ce Mémoire. La simplicité et surtout la généralité des résultats auxquels j'ai été conduit me font espérer que ce travail ne sera pas sans importance pour la théorie mathématique de l'élasticité.

Si, partant de tout point d'un corps solide, on passe sur un des

éléments plans principaux qui se trouvent pressés ou tirés normalement à tout autre point infiniment voisin du premier; que de ce nouveau point on se dirige vers un troisième situé sur le plan principal correspondant au second point, et ainsi de suite; on pourra tracer ainsi, dans l'intérieur du corps solide, trois systèmes de surfaces orthogonales qui jouiront de la propriété d'être toutes pressées ou tirées normalement, c'est-à-dire que chacune de ces surfaces divisera le corps en deux parties qui n'exerceront l'une sur l'autre que des pressions ou des tractions normales.

Ce triple système de surfaces existe dans tout corps solide homogène; il varie dans un même corps avec les directions, les intensités, et les points d'application des efforts extérieurs; il est déterminé et constant dans chaque état d'équilibre, mais il peut changer avec le temps lors du mouvement. J'appelle *isostatiques* ces surfaces et leurs trois systèmes conjugués. Les surfaces isostatiques étant orthogonales doivent nécessairement se couper suivant leurs lignes de courbure.

Pour découvrir les lois que je cherchais, j'ai dû d'abord transformer les équations et les expressions différentielles que fournit la théorie mathématique de l'élasticité, en prenant pour nouvelles coordonnées les paramètres de trois systèmes de surfaces orthogonales, et supposant les déplacements des molécules projetés sur les tangentes aux axes courbes. Pour être effectuées, ces transformations ont exigé l'emploi des formules qui lient entre eux les paramètres différentiels des surfaces conjuguées. Ces formules sont démontrées dans mon Mémoire sur les coordonnées curvilignes, qui fait partie du tome V de ce Journal.

Pour rapporter ensuite l'état d'équilibre du corps solide à ses surfaces isostatiques, il suffit d'exprimer que les forces tangentielles sont nulles sur les surfaces coordonnées dans toute l'étendue du corps. Cette condition introduit trois nouvelles équations, qui établissent des relations nécessaires entre les variations des déplacements normaux aux surfaces isostatiques et les courbures de ces surfaces. Ces relations constituent déjà une partie des lois qu'il s'agissait de démêler; les autres s'obtiennent en combinant ces relations avec les équations générales de l'équilibre d'élasticité, et indiquent de quelle manière varient les pressions normales lorsqu'on passe d'une surface isostatique à

une autre. Toutes ces lois sont d'une grande simplicité, et se prêtent facilement aux applications.

---

§ I.

Équations connues du mouvement et de l'équilibre des solides élastiques.

Les équations générales des petits mouvements intérieurs d'un corps solide homogène, dans lequel l'élasticité est la même suivant toute direction, sont, d'après plusieurs géomètres,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} + \dfrac{d^2u}{dz^2} + 2\,\dfrac{d\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}\right)}{dx} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\[2ex] \dfrac{d^2v}{dx^2} + \dfrac{d^2v}{dy^2} + \dfrac{d^2v}{dz^2} + 2\,\dfrac{d\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}\right)}{dy} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2v}{dt^2} - Y\right), \\[2ex] \dfrac{d^2w}{dx^2} + \dfrac{d^2w}{dy^2} + \dfrac{d^2w}{dz^2} + 2\,\dfrac{d\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}\right)}{dz} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - Z\right); \end{cases}$$

x, y, z, sont les coordonnées rectilignes orthogonales d'un point quelconque m du corps solide, lors de son équilibre d'homogénéité; t représente le temps ou la quatrième variable indépendante; u, v, w, projections sur les trois axes de la distance très petite qui sépare la molécule m de sa position primitive, sont des fonctions inconnues de x, y, z, t, lesquelles doivent vérifier, dans toute l'étendue du corps, les équations (1), et satisfaire en outre aux conditions statiques ou dynamiques de sa surface; X, Y, Z, composantes de la force accélératrice qui agit sur la molécule m, sont des fonctions données de x, y, z, et en général de t; δ représente la densité constante du corps, et ε son coefficient invariable d'élasticité.

Lorsque l'équilibre est établi dans l'intérieur du solide, sous l'action persistante des efforts extérieurs, les équations précédentes régissent encore cet équilibre : les fonctions u, v, w, et X, Y, Z, sont alors indépendantes du temps, et les termes en $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, disparaissent conséquemment.

On sait en outre que la dilatation variable θ est liée aux fonctions u, v, w, par l'équation

$$(2)\qquad \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

en sorte que si l'on désigne par $\Delta_2 F$ le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction F, ou l'expression

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2},$$

les équations du mouvement seront plus simplement

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u + 2\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\ \Delta_2 v + 2\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2v}{dt^2} - Y\right), \\ \Delta_2 w + 2\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - Z\right); \end{cases}$$

et celles de l'équilibre,

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u + 2\dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{\delta}{\varepsilon} X = 0, \\ \Delta_2 v + 2\dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{\delta}{\varepsilon} Y = 0, \\ \Delta_2 w + 2\dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{\delta}{\varepsilon} Z = 0. \end{cases}$$

Les équations (1), en ayant égard à la valeur (2) de la fonction θ, peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} 3\dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)}{dy} - \dfrac{d\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right)}{dz} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\ 3\dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{d\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right)}{dz} - \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2v}{dt^2} - Y\right), \\ 3\dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{d\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right)}{dx} - \dfrac{d\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right)}{dy} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - Z\right); \end{cases}$$

desquelles on conclut, en les ajoutant, après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y, z,

$$(6)\qquad \Delta_2\theta + \frac{\delta}{3\varepsilon}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} - \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0,$$

équation que doit toujours vérifier la fonction θ, ou la dilatation variable.

§ II.

Relations entre les pressions intérieures.

Il est encore une autre forme sous laquelle on emploie les équations du mouvement et de l'équilibre des corps élastiques : si l'on pose

$$(7)\quad \begin{cases} N = \varepsilon\left(\theta + 2\dfrac{du}{dx}\right), & N_1 = \varepsilon\left(\theta + 2\dfrac{dv}{dy}\right), \quad N_2 = \varepsilon\left(\theta + 2\dfrac{dw}{dz}\right), \\ T = \varepsilon\left(\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}\right), & T_1 = \varepsilon\left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right), \quad T_2 = \varepsilon\left(\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}\right); \end{cases}$$

les équations (1) peuvent s'écrire ainsi :

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dN}{dx} + \dfrac{dT_2}{dy} + \dfrac{dT_1}{dz} = \delta\left(\dfrac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\ \dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dN_1}{dy} + \dfrac{dT}{dz} = \delta\left(\dfrac{d^2v}{dt^2} - Y\right). \\ \dfrac{dT_1}{dx} + \dfrac{dT}{dy} + \dfrac{dN_2}{dz} = \delta\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - Z\right). \end{cases}$$

Les groupes de fonctions $[N, T_2, T_1]$, $[T_2, N_1, T]$, $[T_1, T, N_2]$, représentent les projections sur les trois axes des tractions ou pressions, obliques en général, qui sollicitent trois éléments plans se coupant en m, et parallèles aux plans coordonnés; le premier groupe est relatif à l'élément plan perpendiculaire aux x, le second aux y, le troisième aux z. N, N_1, N_2, sont les composantes de ces forces normales aux plans sollicités; T, T_1, T_2, donnent leurs six composantes tangentielles, lesquelles sont égales deux à deux.

Si l'on désigne par N', N'_1, N'_2, T', T'_1, T'_2, les composantes normales et tangentielles des tractions ou pressions exercées au même

point m, sur trois autres éléments plans, parallèles à de nouveaux plans coordonnés rectangulaires; $[m_1, m_2, m_3]$, $[n_1, n_2, n_3]$, $[p_1, p_2, p_3]$, représentant les cosinus des angles que les nouveaux axes des x', y', z', font avec ceux des x, y, z, ces nouvelles composantes sont liées aux premières N, N_1, N_2, T, T_1, T_2, par les six formules suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} N' = m_1^2 N + m_2^2 N_1 + m_3^2 N_2 + 2m_2 m_3 T + 2m_3 m_1 T_1 + 2m_1 m_2 T_2, \\ N'_1 = n_1^2 N + n_2^2 N_1 + n_3^2 N_2 + 2n_2 n_3 T + 2n_3 n_1 T_1 + 2n_1 n_2 T_2, \\ N'_2 = p_1^2 N + p_2^2 N_1 + p_3^2 N_2 + 2p_2 p_3 T + 2p_3 p_1 T_1 + 2p_1 p_2 T_2; \\ T' = n_1 p_1 N + n_2 p_2 N_1 + n_3 p_3 N_2 + (n_2 p_3 + n_3 p_2) T + (n_3 p_1 + n_1 p_3) T_1 + (n_1 p_2 + n_2 p_1) T_2, \\ T'_1 = p_1 m_1 N + p_2 m_2 N_1 + p_3 m_3 N_2 + (p_2 m_3 + p_3 m_2) T + (p_3 m_1 + p_1 m_3) T_1 + (p_1 m_2 + p_2 m_1) T_2, \\ T'_2 = m_1 n_1 N + m_2 n_2 N_1 + m_3 n_3 N_2 + (m_2 n_3 + m_3 n_2) T + (m_3 n_1 + m_1 n_3) T_1 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) T_2. \end{cases}$$

Les neuf cosinus (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3), (p_1, p_2, p_3), sont d'ailleurs liés entre eux par les six formules connues.

Toutes les équations contenues dans les § I et II, représentent, à l'aide des coordonnées rectilignes, toutes les lois du mouvement vibratoire et de l'équilibre intérieur d'un corps solide, homogène et d'élasticité constante. Il s'agit, dans ce Mémoire, d'exprimer les mêmes lois à l'aide d'un système de coordonnées curvilignes. Cette transformation exige l'emploi des formules différentielles que doivent vérifier les paramètres des trois systèmes conjugués de surfaces orthogonales. Ces formules sont établies dans le Mémoire sur les coordonnées curvilignes, qui fait partie du tome V de ce Journal, et auquel se rapportent tous les renvois accompagnés de la lettre M.

§ III.

Déplacements normaux aux surfaces conjuguées.

Il s'agit maintenant de transformer en coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2, les équations qui représentent les petits mouvements et l'équilibre intérieur d'un corps solide.

Les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, qui se coupent en m, font avec les axes rectilignes des x, y, z, des angles dont les cosinus sont

$$\left(\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}, \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}, \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}\right), \quad \left(\frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx}, \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dy}, \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dz}\right), \quad \left(\frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx}, \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dy}, \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dz}\right);$$

si donc l'on désigne par R, R_1, R_2, les projections du déplacement de la molécule m sur ces trois normales, on aura

$$(10)\quad \begin{cases} u = \dfrac{R}{h}\dfrac{d\rho}{dx} + \dfrac{R_1}{h_1}\dfrac{d\rho_1}{dx} + \dfrac{R_2}{h_2}\dfrac{d\rho_2}{dx}, \\ v = \dfrac{R}{h}\dfrac{d\rho}{dy} + \dfrac{R_1}{h_1}\dfrac{d\rho_1}{dy} + \dfrac{R_2}{h_2}\dfrac{d\rho_2}{dy}, \\ w = \dfrac{R}{h}\dfrac{d\rho}{dz} + \dfrac{R_1}{h_1}\dfrac{d\rho_1}{dz} + \dfrac{R_2}{h_2}\dfrac{d\rho_2}{dz}. \end{cases}$$

Ces valeurs de u, v, w, étant différentiées puis substituées dans l'équation (2) donnent, en se servant des formules (8) M,

$$(11)\quad \theta = h^2 \frac{d\dfrac{R}{h}}{d\rho} + h_1^2 \frac{d\dfrac{R_1}{h_1}}{d\rho_1} + h_2^2 \frac{d\dfrac{R_2}{h_2}}{d\rho_2} + \frac{R}{h}\Delta_2\rho + \frac{R_1}{h_1}\Delta_2\rho_1 + \frac{R_2}{h_2}\Delta_2\rho_2,$$

et en éliminant $\Delta_2\rho$, $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$, à l'aide des formules (24) M,

$$(11\,bis)\quad \begin{cases} \theta = hh_1h_2\left(\dfrac{d\dfrac{R}{h_1h_2}}{d\rho} + \dfrac{d\dfrac{R_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \dfrac{d\dfrac{R_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right); \\ \theta = \dfrac{dRh}{d\rho} + \dfrac{dR_1h_1}{d\rho_1} + \dfrac{dR_2h_2}{d\rho_2} - \dfrac{1}{hh_1h_2}\left(\dfrac{dhh_1h_2}{d\rho}Rh + \dfrac{dhh_1h_2}{d\rho_1}R_1h_1 + \dfrac{dhh_1h_2}{d\rho_2}R_2h_2\right); \\ \theta = h\dfrac{dR}{d\rho} + h_1\dfrac{dR_1}{d\rho_1} + h_2\dfrac{dR_2}{d\rho_2} \\ \qquad - \left(\dfrac{h}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho} + \dfrac{h}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\right)R - \left(\dfrac{h_1dh_2}{h_2d\rho_1} + \dfrac{h_1dh}{hd\rho_1}\right)R_1 - \left(\dfrac{h_2dh}{hd\rho_2} + \dfrac{h_2dh_1}{h_1d\rho_2}\right)R_2. \end{cases}$$

Dans ces différentes formes de la valeur de θ, ou de la dilatation, on doit regarder R, R_1, R_2, comme représentant des fonctions inconnues de ρ, ρ_1, ρ_2 et t; h, h_1, h_2, comme des fonctions données de ρ, ρ_1, ρ_2.

§ IV.

Pressions qui sollicitent les surfaces orthogonales.

Soient représentées par A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, les composantes normales et tangentielles des tractions exercées sur trois éléments plans, tangents en m aux trois surfaces conjuguées; pour déduire ces composantes des équations (9), il faut y substituer à (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3),

(p_1, p_2, p_3), les cosinus des angles que les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, font avec les axes des x, y, z, et à N, N_1, N_2, T, T_1, T_2, leurs valeurs (7) en u, v, w; ce qui donne pour A, par exemple,

$$\frac{A}{\varepsilon} = \theta + \frac{2}{h^2}\left[\frac{d\rho}{dx}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right) + \frac{d\rho}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right) + \frac{d\rho}{dz}\left(\frac{dw}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dw}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right)\right],$$

ou plus simplement, d'après les formules (8) M,

$$\frac{A}{\varepsilon} = \theta + 2\left(\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho}{dz}\right).$$

Si maintenant on différentie par rapport à ρ les équations (10), et qu'on ajoute les trois résultats respectivement multipliés par $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$, les formules (2) M et (13) M donneront définitivement

$$\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho}{dz} = h^2\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho} + h\frac{dh}{d\rho}\frac{R}{h} - \frac{h_1^2}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{R_1}{h_1} - \frac{h_2^2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{R_2}{h_2},$$

ce qui donne, par des transformations faciles, pour $\frac{A}{\varepsilon}$ et par suite pour $\frac{A_1}{\varepsilon}$, $\frac{A_2}{\varepsilon}$, les valeurs

$$(12)\left\{\begin{aligned}
\frac{A}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2\right) = \theta + 2\left[\frac{dRh}{d\rho} - \frac{1}{h}\left(\frac{dh}{d\rho}Rh + \frac{dh}{d\rho_1}R_1h_1 + \frac{dh}{d\rho_2}R_2h_2\right)\right].\\
\frac{A_1}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(h_1\frac{dR_1}{d\rho_1} - \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}R_2 - \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}R\right) = \theta + 2\left[\frac{dR_1h_1}{d\rho_1} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}Rh + \frac{dh_1}{d\rho_1}R_1h_1 + \frac{dh_1}{d\rho_2}R_2h_2\right)\right].\\
\frac{A_2}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(h_2\frac{dR_2}{d\rho_2} - \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}R - \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}R_1\right) = \theta + 2\left[\frac{dR_2h_2}{d\rho_2} - \frac{1}{h_2}\left(\frac{dh_2}{d\rho}Rh + \frac{dh_2}{d\rho_1}R_1h_1 + \frac{dh_2}{d\rho_2}R_2h_2\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

Si on les ajoute, on trouve, en ayant égard à la troisième des formes (11) *bis* de θ : $A + A_1 + A_2 = 5\varepsilon\theta$, comme cela devait être d'après un théorème connu.

Les mêmes substitutions étant faites dans la dernière des formules (9), on trouve, en simplifiant les résultats d'après les formules (8) M,

$$\frac{\tau_1}{\varepsilon} = \frac{h}{h_1}\left(\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dz}\right) + \frac{h_1}{h}\left(\frac{du}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dz}\right);$$

or les équations (10) étant différentiées successivement par rapport à ρ et ρ_1, les formules (2) M, et (12) M, donnent, toute réduction faite,

$$\frac{du}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{dw}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dz} = h_1^2 \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_1} + \frac{h_1^2}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{R}{h} + h_1 \frac{dh_1}{d\rho_1}\frac{R_1}{h_1}.$$

$$\frac{du}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{dw}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dz} = h^2 \frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1} + h \frac{dh}{d\rho_1}\frac{R}{h} + \frac{h^2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_1}\frac{R_1}{h_1}.$$

De là résulte, pour $\frac{\tau_2}{\varepsilon}$, et par suite pour $\frac{\tau_1}{\varepsilon}$, $\frac{\tau}{\varepsilon}$,

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{\tau}{\varepsilon} = h_1 \frac{dR_1}{d\rho_1} + h_2 \frac{dR_1}{d\rho_2} + \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1} R_2 + \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2} R_1 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(h_1^2 \frac{dR_2 h_2}{d\rho_1} + h_2^2 \frac{dR_1 h_1}{d\rho_2}\right), \\ \frac{\tau_1}{\varepsilon} = h_2 \frac{dR}{d\rho_2} + h \frac{dR_2}{d\rho} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2} R + \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho} R_2 = \frac{1}{h_2 h}\left(h_2^2 \frac{dRh}{d\rho_2} + h^2 \frac{dR_2 h_2}{d\rho}\right), \\ \frac{\tau_2}{\varepsilon} = h \frac{dR_1}{d\rho} + h_1 \frac{dR}{d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} R_1 + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1} R = \frac{1}{h h_1}\left(h^2 \frac{dR_1 h_1}{d\rho} + h_1^2 \frac{dRh}{d\rho_1}\right). \end{cases}$$

Si les surfaces conjuguées ρ, ρ_1, ρ_2, étaient encore des plans orthogonaux, leurs paramètres différentiels du second ordre h, h_1, h_2, seraient invariables, et pourraient toujours être ramenés à avoir l'unité pour valeur commune; les équations (10), (12), (13), donneraient alors, pour la dilatation et pour les composantes des tractions exercées sur des éléments plans parallèles aux nouveaux plans coordonnés, des expressions en tout semblables à (2) et (7).

§ V.

Relations entre les pressions et les courbures des surfaces sollicitées.

Les forces normales et tangentielles, qui sollicitent les surfaces orthogonales, peuvent facilement s'exprimer par les variations des déplacements normaux, et par les courbures de ces surfaces; de telle sorte que les paramètres différentiels du premier ordre disparaissant, ces expressions se prêtent alors facilement à une interprétation géométrique. En effet, la troisième des formules (11 *bis*), et les valeurs (13)

et (13), rapprochées des formules (b)M, donnent immédiatement

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\theta &= \frac{dR}{ds} + \frac{dR_1}{ds_1} + \frac{dR_2}{ds_2} - \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{c_2}\right)R - \left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{c}\right)R_1 - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c_1}\right)R_2;\\
\frac{A}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(\frac{dR}{ds} - \frac{R_1}{c} - \frac{R_2}{\gamma}\right),\\
\frac{A_1}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(\frac{dR_1}{ds_1} - \frac{R_2}{c_1} - \frac{R}{\gamma_1}\right),\\
\frac{A_2}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(\frac{dR_2}{ds_2} - \frac{R}{c_2} - \frac{R_1}{\gamma_2}\right);\\
\frac{\tau}{\varepsilon} &= \frac{dR_2}{ds_1} + \frac{dR_1}{ds_2} + \frac{R_2}{\gamma_2} + \frac{R_1}{c_1},\\
\frac{\tau_1}{\varepsilon} &= \frac{dR}{ds_2} + \frac{dR_2}{ds} + \frac{R}{\gamma} + \frac{R_2}{c_2},\\
\frac{\tau_2}{\varepsilon} &= \frac{dR_1}{ds} + \frac{dR}{ds_1} + \frac{R_1}{\gamma_1} + \frac{R}{c}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces nouvelles valeurs font voir clairement l'influence que les courbures des surfaces conjuguées peuvent avoir sur les tractions qui les sollicitent. Il sera facile de les énoncer en lois, dans un langage géométrique, en ayant recours aux définitions et aux principes établis au § VI (M, seconde partie).

§ VI.

Équations transformées du mouvement des solides élastiques, rapportées aux pressions.

Les trois équations des petits mouvements intérieurs du corps solide, prises sous la forme (8), et qui sont en N, N_1, N_2, T, T_1, T_2, doivent être exprimées en A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, pour être rapportées aux coordonnées curvilignes. Pour opérer cette transformation, il faut faire usage des équations (9), qui donnent facilement

$$
(15)\quad
\left\{
\begin{aligned}
N &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 A + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 A_1 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 A_2 + \frac{2}{h_1 h}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}\tau + \frac{2}{h_2 h}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx}\tau_1 + \frac{2}{hh_1}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}\tau_2,\\
N_1 &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 A + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 A_1 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 A_2 + \frac{2}{h_1 h_2}\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}\tau + \frac{2}{h_2 h}\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dy}\tau_1 + \frac{2}{hh_1}\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy}\tau_2,\\
N_2 &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 A + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 A_1 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 A_2 + \frac{2}{h_1 h}\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}\tau + \frac{2}{h_2 h}\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dz}\tau_1 + \frac{2}{hh_1}\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz}\tau_2;\\
T &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho}{dz}A + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_1}{dz}A_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}A_2\\
&\quad + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy}\right)\frac{\tau}{h_1 h_2} + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dz} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dy}\right)\frac{\tau_1}{h_2 h} + \left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dz} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dy}\right)\frac{\tau_2}{hh_1},\\
T_1 &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho}{dx}A + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_1}{dx}A_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}A_2\\
&\quad + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz}\right)\frac{\tau}{h_1 h_2} + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dz}\right)\frac{\tau_1}{h_2 h} + \left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz}\right)\frac{\tau}{hh_1},\\
T_2 &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho}{dy}A + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}A_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}A_2\\
&\quad + \left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx}\right)\frac{\tau}{h_1 h_2} + \left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx}\right)\frac{\tau_1}{h_2 h} + \left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx}\right)\frac{\tau_2}{hh_1},
\end{aligned}
\right.
$$

et substituer ces valeurs dans les équations (8). Il suffit de faire ces substitutions dans la première de ces équations. Dans le résultat, les termes en A donnent, d'après les formules (8) M,

$$
\frac{d\dfrac{A}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}}{dx} + \frac{d\dfrac{A}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dy}}{dy} + \frac{d\dfrac{A}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}}{dz} = h^2\,\frac{d\dfrac{A}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho} + \frac{A}{h}\frac{d\rho}{dx}\Delta_2\rho\,;
$$

ou, en substituant, à $\Delta_2\rho$ et $\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho}$, leurs valeurs (24) M et (14 *bis*) M, puis mettant $\dfrac{d\rho}{dx}$, $\dfrac{d\rho_1}{dx}$, $\dfrac{d\rho_2}{dx}$ en facteurs communs, et réduisant :

$$
\left[h_1 h_2\,\frac{d\dfrac{A}{h_1 h_2}}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx}\right].
$$

Les termes en A_1 et A_2 deviennent pareillement

$$
\left[h_2 h\,\frac{d\dfrac{A_1}{h_2 h}}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}\right],
$$

$$
\left[hh_1\,\frac{d\dfrac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}\right].
$$

Les termes en τ donnent, d'après les formules (8) M,

$$\left(\frac{\tau}{h_1h_2}\Delta_2\rho_2+h_2^2\frac{d\frac{\tau}{h_1h_2}}{d\rho_2}\right)\frac{d\rho_1}{dx}+\left(\frac{\tau}{h_1h_2}\Delta_2\rho_1-h_1^2\frac{d\frac{\tau}{h_1h_2}}{d\rho_1}\right)\frac{d\rho_2}{dx}-\frac{\tau}{h_1h_2}\left(h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}-h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}\right);$$

ou, en observant que la derniere parenthèse est nulle, d'apres les formules (9) M, substituant à $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$, leurs valeurs (24) M, et réduisant :

$$hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{hh_1^2}}{d\rho_2}\frac{d\rho_1}{dx}-\frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}\frac{d\rho_2}{dx}\right).$$

Les termes en τ_1 et τ_2 deviennent pareillement

$$hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2^2}}{d\rho}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\frac{d\rho}{dx}\right),$$

$$hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dx}\right).$$

Si l'on réunit maintenant tous ces termes, que l'on pose

$$X=\frac{F}{h}\frac{d\rho}{dx}+\frac{F_1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{F_2}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx}.$$

F, F_1, F_2, étant les composantes de la force accélératrice sur les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, et qu'enfin l'on prenne pour u sa valeur (10), on trouve, pour la première des équations (8), en mettant $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$ en facteurs communs :

$$\left[h_1h_2\frac{d\frac{A}{h_1h_2}}{d\rho}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_2h^2}}{d\rho_1}-\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\right)-\frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}+\frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}-\frac{\delta}{h}\left(F-\frac{d^2R}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho}{dx}$$

$$-\left[h_2h\frac{d\frac{A_1}{h_2h}}{d\rho_1}-hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}-\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho}\right)-\frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}-\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1}-\frac{\delta}{h_1}\left(F_1-\frac{d^2R_1}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho_1}{dx}$$

$$-\left[hh_1\frac{d\frac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2}-hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_2h^2}}{d\rho}-\frac{d\frac{\tau}{hh_1^2}}{d\rho_1}\right)-\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2}-\frac{A_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_2}-\frac{\delta}{h_2}\left(F-\frac{d^2R_2}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho_2}{dx}=0.$$

Les mêmes substitutions, faites dans les deux autres équations (8), donneraient évidemment le même résultat, avec cette différence qu'au lieu des facteurs $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, on aurait $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{d\rho_2}{dy}$ et ensuite $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{d\rho_1}{dz}$, $\frac{d\rho_2}{dz}$; d'où il sera facile de conclure que les parenthèses qui multiplient ces facteurs doivent être nulles.

On a donc, pour représenter les petits mouvements intérieurs d'un corps solide, à l'aide d'un système de coordonnées curvilignes, les trois équations

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&h_1h_2\frac{d\frac{A}{h_1h_2}}{d\rho}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{h_2h}}{d\rho_2}+\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h}}{d\rho_1}\right)+\frac{A_1\,dh_1}{h_1\,d\rho}+\frac{A_2\,dh_2}{h_2\,d\rho}-\frac{\delta}{h}F=\frac{\delta}{h}\frac{d^2R}{dt^2},\\
&h_2h\frac{d\frac{A_1}{h_1h}}{d\rho_1}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{hh_1}}{d\rho}+\frac{d\frac{\tau}{h_2h}}{d\rho_2}\right)+\frac{A_2\,dh_2}{h_2\,d\rho_1}+\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1}+\frac{\delta}{h_1}F_1=\frac{\delta}{h_1}\frac{d^2R_1}{dt^2},\\
&hh_1\frac{d\frac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2}}{d\rho_2}+\frac{d\frac{\tau}{hh_1}}{d\rho_1}\right)-\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2}-\frac{A_1\,dh_1}{h_1\,d\rho_2}+\frac{\delta}{h_2}F_2=\frac{\delta}{h_2}\frac{d^2R_2}{dt^2}.
\end{aligned}\right.$$

ou, en développant et multipliant respectivement ces trois équations par h, h_1, h_2,

$$(16\,bis.)\quad \left\{\begin{aligned}
&h\frac{dA}{d\rho}+h_1\frac{d\tau_2}{d\rho_2}+h_2\frac{d\tau_1}{d\rho_2}+\delta.F=\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}(A_1-A_2)+\frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}(A_2-A_1)\\
&\qquad+\left(2\frac{h_1\,dh}{h\,d\rho_1}+\frac{h_1\,dh_2}{h_2\,d\rho_1}\right)\tau+\left(2\frac{h_2\,dh}{h\,d\rho_2}+\frac{h_2\,dh_1}{h_1\,d\rho_2}\right)\tau_1+\delta\frac{d^2R}{dt^2}.\\
&h\frac{d\tau}{d\rho}+h_1\frac{dA_1}{d\rho_1}+h_2\frac{d\tau}{d\rho_2}+\delta.F_1=\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_1}{d\rho_1}(A_1-A_2)+\frac{h_1\,dh}{h\,d\rho_1}(A_1-A)\\
&\qquad+\left(2\frac{h_2\,dh_1}{h_1\,d\rho_2}+\frac{h_2\,dh}{h\,d\rho_2}\right)\tau+\left(2\frac{h\,dh_1}{h_1\,d\rho}+\frac{h\,dh_2}{h_2\,d\rho_2}\right)\tau_2+\delta\frac{d^2R}{dt^2}.\\
&h\frac{d\tau_1}{d\rho}+h_1\frac{d\tau}{d\rho_1}+h_2\frac{dA_2}{d\rho_2}+\delta.F_2=\frac{h_2\,dh}{h\,d\rho_2}(A-A_2)+\frac{h_2\,dh_1}{h_1\,d\rho_2}(A_2-A_1)\\
&\qquad+\left(2\frac{h\,dh_2}{h_2\,d\rho}+\frac{h\,dh_1}{h_1\,d\rho}\right)\tau_1+\left(2\frac{h_1\,dh_2}{h_1\,d\rho_1}+\frac{h_2\,dh}{h\,d\rho_1}\right)\tau+\delta\frac{d^2R}{dt^2}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine les paramètres, à l'aide des formules (*b*) M, ces équations prennent la forme suivante :

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{ds}+\dfrac{d\tau_2}{ds_1}-\dfrac{d\tau_1}{ds_2}+\delta.F=\dfrac{1}{\gamma_1}(A-A_1+\dfrac{1}{c_2}A-A_2)+\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{\gamma_2}\right)\tau_2-\left(\dfrac{2}{\gamma}+\dfrac{1}{c_1}\right)\tau_1+\delta\dfrac{d^2R}{dt^2}, \\ \dfrac{d\tau_2}{ds}+\dfrac{dA_1}{ds_1}+\dfrac{d\tau_1}{ds_2}+\delta.F_1=\dfrac{1}{\gamma_2}(A_1-A_2+\dfrac{1}{c}A_1-A)+\left(\dfrac{2}{c_1}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\tau+\left(\dfrac{2}{\gamma_1}+\dfrac{1}{c_2}\right)\tau_2+\delta\dfrac{d^2R_1}{dt^2}, \\ \dfrac{d\tau_1}{ds}+\dfrac{d\tau}{ds_1}+\dfrac{dA_2}{ds_2}+\delta.F_2=\dfrac{1}{\gamma}(A_2-A+\dfrac{1}{c_1}A_2-A_1)+\left(\dfrac{2}{c_2}+\dfrac{1}{\gamma_1}\right)\tau_1-\left(\dfrac{2}{\gamma_2}-\dfrac{1}{c}\right)\tau+\delta.\dfrac{d^2R_2}{dt^2}. \end{cases}$$

§ VII.

Équations du mouvement des solides élastiques en coordonnées curvilignes.

Pour obtenir les trois équations générales en R, R_1 et R_2 seulement, il faudrait substituer, dans les équations (16), les valeurs (12) et (13) de A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2; mais il est plus simple de transformer directement les équations (5).

Si l'on pose, pour simplifier,

$$(18)\qquad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=W,\quad \frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=V,\quad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=U.$$

ces équations (5) prennent la forme suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} 3\dfrac{d\theta}{dx}+\dfrac{dW}{dy}-\dfrac{dV}{dz}+\dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(X-\dfrac{d^2u}{dt^2}\right)=0, \\ 3\dfrac{d\theta}{dy}+\dfrac{dU}{dz}-\dfrac{dW}{dx}+\dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(Y-\dfrac{d^2v}{dt^2}\right)=0, \\ 3\dfrac{d\theta}{dz}+\dfrac{dV}{dx}-\dfrac{dU}{dy}+\dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(Z-\dfrac{d^2w}{dt^2}\right)=0. \end{cases}$$

Or les valeurs (10) donnent facilement, par des différentiations dans lesquelles on regarde $\frac{R}{h}$, $\frac{R_1}{h_1}$, $\frac{R_2}{h_2}$, comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 :

$$W=\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}-\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)\left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx}-\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}\right)+\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2}-\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx}-\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy}\right)$$
$$+\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}-\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)\left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx}-\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}\right),$$

ou, en éliminant les secondes parenthèses de chaque terme, à l'aide des formules (4) M :

$$W = \frac{h_1 h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{dz_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{dz_2}\right)\frac{dz_2}{dz} - \frac{h_2 h}{h_1}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{dz_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{dz}\right)\frac{dz_1}{dz} + \frac{h h_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{dz_2} - \frac{d\frac{R}{h}}{dz_1}\right)\frac{dz}{dz}.$$

Les fonctions V et U s'obtiennent de la même manière, et si l'on pose

$$(20)\quad \frac{h_1 h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{dz_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{dz_2}\right) = r, \quad \frac{h_2 h}{h_1}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{dz_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{dz}\right) = r_1, \quad \frac{h h_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{dz} - \frac{d\frac{R}{h}}{dz_1}\right) = r_2,$$

on aura

$$U = r\frac{dz}{dx} + r_1\frac{dz_1}{dx} + r_2\frac{dz_2}{dx},$$

$$V = r\frac{dz}{dy} + r_1\frac{dz_1}{dy} + r_2\frac{dz_2}{dy},$$

$$W = r\frac{dz}{dz} + r_1\frac{dz_1}{dz} + r_2\frac{dz_2}{dz};$$

d'où l'on conclura, comme ci-dessus,

$$\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} = \frac{h_1 h_2}{h}\left(\frac{dr_2}{dz_1} - \frac{dr_1}{dz_2}\right)\frac{dz}{dz} + \frac{h_2 h}{h_1}\left(\frac{dr}{dz_2} - \frac{dr_2}{dz}\right)\frac{dz_1}{dz} + \frac{h h_1}{h_2}\left(\frac{dr_1}{dz} - \frac{dr}{dz_1}\right)\frac{dz_2}{dz}.$$

Si l'on substitue cette dernière expression dans la troisième des équations (19), en y remplaçant en outre $\frac{dZ}{dz}$ par $\left(\frac{dZ}{dz_1}\frac{dz_1}{dz} + \frac{dZ}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} + \frac{dZ}{dz}\frac{dz}{dz}\right)$, Z par $\left(\frac{F}{h}\frac{dz}{dz} + \frac{F_1}{h_1}\frac{dz_1}{dz} + \frac{F_2}{h_2}\frac{dz_2}{dz}\right)$, et u par sa valeur (10), on obtient

$$\left[3\frac{d\theta}{dz} + \frac{h_1 h_2}{h}\left(\frac{dr_2}{dz_1} - \frac{dr_1}{dz_2}\right) + \frac{\delta}{\varepsilon h}\left(F - \frac{d^2R}{dt^2}\right)\right]\frac{dz}{dz}$$
$$+\left[3\frac{d\theta}{dz_1} + \frac{h_2 h}{h_1}\left(\frac{dr_2}{dz} - \frac{dr}{dz_2}\right) + \frac{\delta}{\varepsilon h_1}\left(F_1 - \frac{d^2R_1}{dt^2}\right)\right]\frac{dz_1}{dz}$$
$$+\left[3\frac{d\theta}{dz_2} + \frac{h h_1}{h_2}\left(\frac{dr}{dz_1} - \frac{dr_1}{dz}\right) + \frac{\delta}{\varepsilon h_2}\left(F_2 - \frac{d^2R_2}{dt^2}\right)\right]\frac{dz_2}{dz} = 0;$$

d'où il est facile de conclure, comme au § VI, que les trois équations

transformées sont

$$(21)\quad \begin{cases} 3\,h\,\dfrac{d\rho}{d\rho} + h_1 h_2 \left(\dfrac{dr_1}{d\rho_2} - \dfrac{dr_2}{d\rho_1}\right) + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\mathrm{F} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\dfrac{d^2\mathrm{R}}{dt^2}, \\ 3\,h_1\,\dfrac{d\rho}{d\rho_1} + h_2 h \left(\dfrac{dr_2}{d\rho} - \dfrac{dr}{d\rho_2}\right) + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\mathrm{F}_1 = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\dfrac{d^2\mathrm{R}_1}{dt^2}, \\ 3\,h_2\,\dfrac{d\rho}{d\rho_2} + h h_1 \left(\dfrac{dr}{d\rho_1} - \dfrac{dr_1}{d\rho}\right) + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\mathrm{F}_2 = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\dfrac{d^2\mathrm{R}_2}{dt^2}, \end{cases}$$

ou bien, en y substituant à r, r_1, r_2, leurs valeurs (20),

$$(22)\quad \begin{cases} 3\,\dfrac{h}{h_1 h_2}\dfrac{d\rho}{d\rho} + \dfrac{d\dfrac{h_2 h}{h_1}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_2} - \dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho_2} - \dfrac{d\dfrac{h h_1}{h_2}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_2}{h_1}}{d\rho} - \dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho_1} = \dfrac{\delta}{\varepsilon h_1 h_2}\left(\dfrac{d^2\mathrm{R}}{dt^2} - \mathrm{F}\right), \\ 3\,\dfrac{h_1}{h_2 h}\dfrac{d\rho}{d\rho_1} + \dfrac{d\dfrac{h h_1}{h_2}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho} - \dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho} - \dfrac{d\dfrac{h_1 h_2}{h}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} - \dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_2} = \dfrac{\delta}{\varepsilon h_1 h}\left(\dfrac{d^2\mathrm{R}_1}{dt^2} - \mathrm{F}_1\right), \\ 3\,\dfrac{h_2}{h h_1}\dfrac{d\rho}{d\rho_2} - \dfrac{d\dfrac{h_1 h_2}{h}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} - \dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_1} - \dfrac{d\dfrac{h_2 h}{h_1}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_2} - \dfrac{d\dfrac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho} = \dfrac{\delta}{\varepsilon h h_1}\left(\dfrac{d^2\mathrm{R}_2}{dt^2} - \mathrm{F}_2\right). \end{cases}$$

Ces trois équations, respectivement différentiées en ρ, ρ_1, ρ_2, puis ajoutées, donnent

$$(23)\quad hh_1h_2\left[\dfrac{d\dfrac{h}{h_1 h_2}\dfrac{d\rho}{d\rho}}{d\rho} + \dfrac{d\dfrac{h_1}{h_2 h}\dfrac{d\rho}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \dfrac{d\dfrac{h_2}{h h_1}\dfrac{d\rho}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \dfrac{\delta}{3\varepsilon}\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{F}}{h_1 h_2}}{d\rho} + \dfrac{d\dfrac{\mathrm{F}_1}{h_2 h}}{d\rho_1} + \dfrac{d\dfrac{\mathrm{F}_2}{h h_1}}{d\rho_2}\right)\right] = \dfrac{\delta}{3\varepsilon}\dfrac{d^2\rho}{dt^2},$$

ou, d'après la formule (25) M,

$$(24)\quad \frac{3\varepsilon}{\delta}\,\Delta_2\rho + hh_1h_2\left(\dfrac{d\dfrac{\mathrm{F}}{h_1 h_2}}{d\rho} + \dfrac{d\dfrac{\mathrm{F}_1}{h_2 h}}{d\rho_1} + \dfrac{d\dfrac{\mathrm{F}_2}{h h_1}}{d\rho_2}\right) = \dfrac{d^2\rho}{dt^2},$$

équation qui n'est autre que (6).

§ VIII.

Équations de l'équilibre des solides élastiques, en coordonnées curvilignes.

Lorsque le corps solide est intérieurement en équilibre, les déplacements normaux R, R_1, R_2, ne doivent pas contenir le temps; on obtiendra donc les équations générales de cet équilibre, en annulant les termes en $\frac{d^2R}{dt^2}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$, $\frac{d^2R_2}{dt^2}$, dans les équations (16), (17) ou (22), qui deviennent alors

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&h_1h_2\frac{d\frac{A}{h_1h_2}}{d\rho} + hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\right) + \frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} - \frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho} + \frac{\delta}{h}F = 0,\\
&h_2h\frac{d\frac{A_1}{h_2h}}{d\rho_1} + hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_1h_2^2}}{d\rho_2} + \frac{d\frac{\tau_1}{h_2h_1^2}}{d\rho}\right) + \frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1} - \frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1} + \frac{\delta}{h_1}F_1 = 0,\\
&hh_1\frac{d\frac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2} + hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2^2}}{d\rho} + \frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}\right) + \frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2} + \frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2} + \frac{\delta}{h_2}F_2 = 0,
\end{aligned}\right.$$

d'après les formules (16); ou bien

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dA}{ds} + \frac{d\tau_2}{ds_1} + \frac{d\tau_1}{ds_2} + \delta F = \frac{A - A_1}{\gamma_1} + \frac{A - A_2}{c_2} + \left(\frac{2}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\tau_2 + \left(\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{c_1}\right)\tau_1,\\
&\frac{d\tau_2}{ds} + \frac{dA_1}{ds_1} + \frac{d\tau}{ds_2} + \delta F_1 = \frac{A_1 - A_2}{\gamma_2} + \frac{A_1 - A}{c} + \left(\frac{2}{c_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\tau + \left(\frac{2}{\gamma_1} + \frac{1}{c}\right)\tau_2,\\
&\frac{d\tau_1}{ds} + \frac{d\tau}{ds_1} + \frac{dA_2}{ds_2} + \delta F_2 = \frac{A_2 - A}{\gamma} + \frac{A_2 - A_1}{c_1} + \left(\frac{2}{c} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\tau_1 + \left(\frac{2}{\gamma_1} + \frac{1}{c}\right)\tau
\end{aligned}\right.$$

d'après celles (17); on a encore

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&3h\frac{d\theta}{d\rho} + h_1h_2\left[\frac{d\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho_2} - \frac{d\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho_1}\right] + \frac{\delta}{c}F = 0,\\
&3h_1\frac{d\theta}{d\rho_1} + h_2h\left[\frac{d\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho} - \frac{d\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_2}\right] + \frac{\delta}{c}F_1 = 0,\\
&3h_2\frac{d\theta}{d\rho_2} + hh_1\left[\frac{d\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_1} - \frac{d\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho}\right] + \frac{\delta}{c}F_2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

d'après les équations (22). L'un ou l'autre de ces groupes, dans lesquels il faut supposer A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, θ, remplacés par les expressions (11), (12) et (13) ou (14), peut représenter l'état d'équilibre du corps solide rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques. Il est aisé de voir que ces groupes reprennent les formes ordinaires (8) ou (5), lorsque les surfaces coordonnées sont des plans parallèles et orthogonaux.

§ IX.

Cas simple d'une compression uniforme.

Pour vérifier les équations trouvées dans un cas simple, faisons abstraction de la force accélératrice, et supposons que tous les points matériels du corps solide se rapprochent d'un même point, pris pour origine des x, y, z, de quantités proportionnelles aux distances qui les en séparent, sur les droites mêmes qui mesurent ces distances; ce sera le cas physique d'une contraction uniforme dans tous les sens, opérée par un fluide comprimé, qui entourerait le solide. L'équilibre existera encore dans ce nouvel état du corps, si les équations du paragraphe précédent sont identiquement satisfaites par les valeurs de R, R_1, R_2, déduites de l'hypothèse posée.

Soient $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ la distance qui sépare la molécule m de l'origine des x, y, z, avant la compression; et $(-\alpha r)$ la quantité dont cette même molécule se trouve rapprochée de la même origine, sur la droite r, quand la compression est opérée et l'équilibre rétabli intérieurement. On aura évidemment, pour les composantes de ce déplacement,

$$28 \qquad \left\{ \begin{aligned} R &= -\frac{\alpha}{h}\left(x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + z\frac{dz}{dz}\right), \\ R_1 &= -\frac{\alpha}{h_1}\left(x\frac{dz_1}{dx} + y\frac{dz_1}{dy} + z\frac{dz_1}{dz}\right), \\ R_2 &= -\frac{\alpha}{h_2}\left(x\frac{dz_2}{dx} + y\frac{dz_2}{dy} + z\frac{dz_2}{dz}\right), \end{aligned} \right.$$

et l'on doit supposer ici que x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ..., h, h_1, h_2, sont des fonctions connues de z, z_1, z_2.

La valeur de θ [seconde forme du groupe (11) *bis*], ayant reçu les valeurs (28) de R, R_1, R_2, si l'on développe le résultat, en y remplaçant les coefficients différentiels de x, y, z, en ρ, ρ_1, ρ_2, et $\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho}$, $\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho}$, ... par les valeurs déduites des formules (11) M et (14) *bis* M, on trouve facilement, toute réduction faite,

$$\theta = -3\alpha. \tag{29}$$

résultat prévu. La valeur de τ (31) devient

$$\tau = -\frac{\alpha\varepsilon}{h_1 h_2}\left[h_1^2\,\frac{d\left(x\frac{d\rho_2}{dx}+y\frac{d\rho_2}{dy}+z\frac{d\rho_2}{dz}\right)}{d\rho_1} - h_2^2\,\frac{d\left(x\frac{d\rho_1}{dx}+y\frac{d\rho_1}{dy}+z\frac{d\rho_1}{dz}\right)}{d\rho_2}\right];$$

or la parenthèse développée devient, d'après le groupe (5) M,

$$x\left(h_1^2\,\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}+h_2^2\,\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}\right)+y\left(h_1^2\,\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}+h_2^2\,\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}\right)+z\left(h_1^2\,\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}+h_2^2\,\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}\right)$$
$$-2\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}\right).$$

et tous les termes disparaissent d'eux-mêmes, d'après les formules (2) M et (9) M; ainsi $\tau = 0$. On arrive à la même conclusion pour τ_1 et τ_2. Donc, dans le cas actuel, les forces tangentielles sont partout nulles, quel que soit le système de coordonnées curvilignes adopté. La valeur de A (12) devient

$$A = -3\alpha - 2\alpha\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)}{d\rho} - \dfrac{1}{h}\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)\dfrac{dh}{d\rho} \\ -\dfrac{1}{h}\left(x\frac{d\rho_1}{dx}+y\frac{d\rho_1}{dy}+z\frac{d\rho_1}{dz}\right)\dfrac{dh}{d\rho_1} - \dfrac{1}{h}\left(x\frac{d\rho_2}{dx}+y\frac{d\rho_2}{dy}+z\frac{d\rho_2}{dz}\right)\dfrac{dh}{d\rho_2}\end{array}\right\};$$

d'où, développant, et remplaçant $\frac{dx}{d\rho}$, $\frac{dy}{d\rho}$, $\frac{dz}{d\rho}$, par leurs valeurs (5) M, puis remarquant que les termes en x, en y, en z, sont nuls d'eux-mêmes d'après les formules (11) M, on trouve simplement

$$A = -5\alpha\varepsilon = -P. \tag{30}$$

On aurait aussi $A_1 = A_2 = -5\alpha\varepsilon$; c'est-à-dire que la pression est constante, et la même dans tous les sens, pour le corps entier.

Les valeurs de θ, A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, étant maintenant connues, on peut vérifier si elles satisfont aux équations générales de l'équilibre (25), dans lesquelles il faut supprimer F, F_1, F_2. Or la première de ces équations devient, par ces substitutions,

$$-P\left(h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_1 h_2}}{d\rho_1} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2} - \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_2}\right) = 0,$$

et est identique. Ainsi le groupe (25) est identiquement satisfait. Les valeurs (28), données aux déplacements, correspondent donc à un état d'équilibre.

§ X.

Formule entre des intégrales définies, déduite du cas de la compression.

Le cas qui vient d'être traité conduit à une conséquence analytique remarquable. Supposons que les surfaces ρ soient toutes fermées, et considérons l'une d'elles en particulier; le phénomène de la contraction fera rapprocher tous ses points matériels de l'origine des x, y, z, que nous supposerons située dans l'intérieur de cette enveloppe; on aura évidemment l'espace parcouru et abandonné à l'extérieur, lors de ce déplacement général, en intégrant la différentielle $(-R ds_1 ds_2)$, et étendant l'intégrale à toutes les valeurs des paramètres ρ_1 et ρ_2; mais ce même espace doit être égal à la compression cubique constante $(-\theta)$ multipliée par le volume enveloppé $V = \int\int\int ds\, ds_1 ds_2$; l'intégrale triple qui précède étant étendue à toutes les valeurs de ρ_1 et ρ_2, et aux valeurs du paramètre ρ inférieures à celle de la surface considérée.

Ainsi l'on devra avoir, en substituant à ds, ds_1, ds_2 leurs valeurs $\left(\frac{d\rho}{h}, \frac{d\rho_1}{h_1}, \frac{d\rho_2}{h_2}\right)$, à R et θ celles (28) et (29), et supprimant le facteur commun α,

$$(31)\qquad \int\int\left(x\frac{d\rho}{dx} + y\frac{d\rho}{dy} + z\frac{d\rho}{dz}\right)\frac{d\rho_1 d\rho_2}{hh_1h} = 3V = 3\int\int\int\frac{d\rho\, d\rho_1 d\rho_2}{hh_1h_2}.$$

équation dans laquelle on suppose $\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)$ et h, h_1, h_2, exprimées en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. [J'ai donné une application de la formule (31), dans ce Journal, cahier de novembre 1838.]

§ XI.

Condition des surfaces isostatiques, et variation des tractions principales.

L'équilibre intérieur d'un corps solide étant maintenant exprimé en coordonnées curvilignes quelconques, par les équations des § III, IV, V et VIII, il est facile de trouver les lois qui régissent les variations de grandeur et de direction des tractions ou des pressions principales. Les surfaces *isostatiques*, orthogonales entre elles, sur lesquelles s'exercent les tractions principales, et qui ont été suffisamment définies dans l'introduction, jouissent de la propriété de n'être sollicitées par aucune force tangentielle. Il suit de là que le système coordonné des paragraphes cités, ne sera autre que celui des surfaces isostatiques, si l'on exprime que les composantes tangentielles (13 ou (14) sont nulles dans toute l'étendue du corps.

Ainsi les trois équations

$$(32)\quad \begin{cases} h_1^2\dfrac{dR_2h_2}{d\rho_1}+h_2^2\dfrac{dR_1h_1}{d\rho_2}=0,\\ h_2^2\dfrac{dRh}{d\rho_2}+h^2\dfrac{dR_2h_2}{dz}=0,\\ h^2\dfrac{dR_1h_1}{dz}+h_1^2\dfrac{dRh}{d\rho_1}=0, \end{cases}$$

d'après les valeurs (13); ou celles-ci

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{dR_2}{ds_1}+\dfrac{dR_1}{ds_2}+\dfrac{R_2}{\gamma_2}+\dfrac{R_1}{c_1}=0,\\ \dfrac{dR}{ds_2}+\dfrac{dR_2}{ds}+\dfrac{R}{\gamma}+\dfrac{R_2}{c_2}=0,\\ \dfrac{dR_1}{ds}+\dfrac{dR}{ds_1}+\dfrac{R_1}{\gamma_1}+\dfrac{R}{c}=0, \end{cases}$$

d'après les valeurs (14), renferment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de surfaces orthogonales soit un système isostatique. Elles expriment les relations qui doivent alors exister entre les déplacements normaux et les courbures des surfaces.

Lorsque le corps solide est rapporté à des surfaces isostatiques, les équations qui expriment son équilibre intérieur se simplifient; en effet, si l'on pose $\tau = \tau_1 = \tau_2 = 0$, dans le groupe (25), on obtient pour ces équations

$$(34)\quad \begin{cases} h\dfrac{dA}{d\rho} + \delta.F = \dfrac{h}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}(A - A_1) + \dfrac{h}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}(A - A_2), \\ h_1\dfrac{dA_1}{d\rho_1} + \delta.F_1 = \dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}(A_1 - A_2) + \dfrac{h_1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}(A_1 - A), \\ h_2\dfrac{dA_2}{d\rho_2} + \delta.F_2 = \dfrac{h_2}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}(A_2 - A) + \dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}(A_2 - A_1); \end{cases}$$

ou bien, d'après les formules (*b*) M,

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{ds} + \delta.F = \dfrac{A - A_1}{\gamma_1} + \dfrac{A - A_2}{c_2}, \\ \dfrac{dA_1}{ds_1} + \delta.F_1 = \dfrac{A_1 - A_2}{\gamma_2} + \dfrac{A_1 - A}{c}, \\ \dfrac{dA_2}{ds_2} + \delta.F_2 = \dfrac{A_2 - A}{\gamma} + \dfrac{A_2 - A_1}{c_1}. \end{cases}$$

Ces relations expriment de quelle manière doit varier la traction principale exercée sur une surface isostatique, lorsqu'en suivant sa direction on passe à une autre surface isostatique, infiniment voisine de la première. Si, faisant abstraction de la force accélératrice, on adopte les définitions que j'ai établies (§ V, M, deuxième partie), la loi unique, donnée par les équations (35), pourra s'énoncer ainsi :

Dans un corps solide, en équilibre intérieurement, chaque traction principale éprouve, suivant sa direction même, une variation qui est égale à la somme de ses excès sur les deux autres tractions principales, respectivement multipliées par les courbures correspondantes de la surface sollicitée.

Telle est la loi générale qui régit les variations de grandeur des tractions principales. Quant à la loi unique, donnée par les équations (33),

elle régit en quelque sorte les variations de direction de ces forces, puisqu'elle détermine les formes des surfaces isostatiques.

§ XII.

Cas simple d'un déplacement général par translation.

Les équations (32) sont identiquement satisfaites, d'après les formules (9) M, lorsque l'on prend pour R, R_1, R_2, les valeurs

$$(36)\quad \begin{cases} R = \dfrac{a}{h}\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{b}{h}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{c}{h}\dfrac{dx}{dz}, \\ R_1 = \dfrac{a}{h_1}\dfrac{dx_1}{dx} + \dfrac{b}{h_1}\dfrac{dx_1}{dy} + \dfrac{c}{h_1}\dfrac{dx_1}{dz}, \\ R_2 = \dfrac{a}{h_2}\dfrac{dx_2}{dx} + \dfrac{b}{h_2}\dfrac{dx_2}{dy} + \dfrac{c}{h_2}\dfrac{dx_2}{dz}. \end{cases}$$

Les forces tangentielles sont donc nulles d'elles-mêmes. Mais il est aisé de voir que les déplacements moléculaires donnés par les équations (36) sont tous égaux et parallèles, puisqu'ils ont tous pour projections sur les axes des x, y, z, les constantes a, b, c; d'où il suit que le corps n'éprouve alors qu'un mouvement de translation; les forces tangentielles devaient donc être nulles dans ce cas. Il doit d'ailleurs en être de même des tractions normales aux surfaces conjuguées; et en effet, si l'on substitue les valeurs (36) dans les expressions (12) de A, A_1, A_2, on trouve qu'elles se réduisent à zéro, d'après les formules (11) M, ainsi que θ [seconde formule (11) *bis*]. Les équations générales de l'équilibre (27) sont en outre satisfaites par les valeurs (36), quand on néglige les forces accélératrices; car θ est nul, et les expressions

$$\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{dx_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{dx_2}\right), \quad \left(\frac{d\frac{R}{h}}{dx_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{dx}\right), \quad \left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{dx} - \frac{d\frac{R}{h}}{dx_1}\right),$$

se réduisent aussi à zéro, d'après les formules (7) M.

On verrait, tout aussi facilement, que les valeurs de R, R_1, R_2, exprimées en coordonnées curvilignes, qui correspondraient à un mouvement général de rotation du corps solide autour d'un même axe fixe, donnent zéro pour la dilatation (11), pour les tractions nor-

males (12), pour les forces tangentielles (13), et vérifient les équations d'équilibre (27). Ces deux cas simples, ainsi que celui qui est traité au § IX, dont les résultats étaient connus d'avance, constatent la réalité de toutes nos formules.

Les nouvelles équations de l'équilibre intérieur d'un corps solide, contenues dans ce Mémoire, sont les seules dont on puisse faire usage pour aborder un problème général, fécond en applications, et dont voici l'énoncé :

Déterminer les forces qui doivent solliciter un corps solide, découpé par un système donné de surfaces orthogonales, pour que ce système soit isostatique.

La solution de ce problème consistera à chercher des fonctions R, R_1, R_2, des coordonnées curvilignes données, qui satisfassent à la fois aux équations (32) et (27); ces valeurs étant ensuite substituées dans les équations (12), donneront les tractions ou les pressions principales en chaque point du corps solide, et par suite les forces qui doivent solliciter sa surface.

Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs deux espèces de courbures;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collége de France.

La cycloïde et la spirale logarithmique ont été remarquées par les géomètres comme se reproduisant, en quelque sorte, dans leurs développées. Mais j'ignore si l'on a reconnu qu'il existe des courbes qui sont leurs développées à elles-mêmes.

L'équation polaire de la spirale logarithmique étant $u^m = e^t$, u sera le rayon vecteur et t l'azimuth de ce rayon, en sorte que si t s'accroît, on parcourra la courbe dans le sens de l'accroissement de u, et quand t diminuera on suivra la courbe en sens contraire : m est un paramètre constant. Si, par exemple, on pose $t - \frac{3\pi}{2}$ à la place de t, on aura

$$u_1^m = e^{t - \frac{3\pi}{2}} = u^m . e^{-\frac{3\pi}{2}}.$$

Ce point de la courbe sera situé sur une perpendiculaire au rayon vecteur u. On sait que sur ce même rayon vecteur se trouve le centre de courbure, répondant au point (t, u), et que ses coordonnées sont

$$t_1 = t - \frac{3\pi}{2}, \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{m} u,$$

(Voyez le *Calcul différentiel* de M. Lacroix); il s'ensuit qu'il est sur la courbe $u_1 = \frac{1}{m} e^{\frac{1}{m}\left(t_1 + \frac{3\pi}{2}\right)}$, laquelle est une spirale égale à la développante, mais autrement placée sur le plan des coordonnées, selon la remarque de Jacques Bernoulli; et que par suite le rayon u_1 forme avec

la développée, l'angle constant dont m est la tangente. On peut disposer de ce paramètre de manière que le centre de courbure coïncide avec le point de la développante, que nous avons mentionné ci-dessus, et dont les coordonnées sont

$$t_1 = t - \frac{3\pi}{2}, \quad u_1 = ue^{-\frac{3\pi}{2m}},$$

il faudra pour cela que $\frac{1}{m}u = ue^{-\frac{3\pi}{2m}}$; en élevant à la puissance m, et en divisant par u^m, on aura

$$m^m = e^{\frac{3\pi}{2}},$$

ce qui donne pour m la valeur approximative $m = 3{,}64427\ldots$ Cette valeur de m fournira une spirale logarithmique dont la développée sera située sur la courbe elle-même.

On peut obliger le centre de courbure à se placer sur une autre spire intérieure à celle que nous venons d'employer, mais toujours sur la même direction perpendiculaire au rayon vecteur u; ainsi l'on pourra le faire coïncider avec le point

$$t_1 = t - \frac{7\pi}{2}, \quad u_1 = u.e^{-\frac{7\pi}{2m}},$$

et l'on aura, pour déterminer m, l'équation

$$m^m = e^{\frac{7\pi}{2}}.$$

Cette valeur donnera une autre spirale logarithmique qui sera aussi sa développée à elle-même. En général, si l'on détermine m par l'équation

$$m^m = e^{(4i-1)\frac{\pi}{2}},$$

i étant un entier positif, on aura encore le paramètre d'une spirale logarithmique qui contiendra sa développée : ainsi il existe un nombre infini de spirales qui offrent cette singularité d'être leurs développées.

Cette propriété repose sur celle de la spirale logarithmique, d'avoir pour développée une courbe de forme identique à la développante,

et qui pourrait lui être superposée par un déplacement. Dans une autre note, nous nous occuperons de la question de savoir quelles sont les courbes qui ont ce caractere, de se reproduire dans leurs développées : elle conduit à une équation aux différences mêlées, qui exige la résolution d'une équation transcendante de la forme

$$m^m = A.$$

Mais en ce moment nous allons donner la construction d'un genre de surfaces courbes qui renferment les centres de l'une de leurs deux espèces de courbures ; propriété analogue à celle qui vient d'être constatée pour les spirales logarithmiques, dont on a déterminé convenablement le paramètre m.

Ayant choisi arbitrairement deux surfaces quelconques S, S_1, on leur mènera un plan tangent R : on les suppose telles que ce plan puisse librement rouler, sans glisser, sur S et S_1 ; on tracera sur le plan tangent mobile R l'une des spirales particulières λ renfermant sa propre développée. Entraînée avec le plan R dans son roulement sur les surfaces S, S_1, la courbe λ deviendra la génératrice d'une surface courbe Λ, qui offrira cette propriété que, dans chacune de ses positions, λ sera une ligne de courbure de la surface Λ ; et les centres de courbure de Λ, considérés dans le sens de λ, seront situés sur la courbe λ elle-même, prise dans cette position. Dans son mouvement général, la courbe λ aura donc engendré à la fois la surface Λ et l'une des nappes, lieu des centres de ses courbures principales. Le lieu des centres de la seconde espèce de courbure de Λ sera la surface développable à laquelle le plan R demeure tangent dans toutes ses positions, et dont il est l'enveloppée mobile, selon la dénomination usitée par Monge : cette surface enveloppe les deux arbitraires S et S_1, et sa forme ne dépend que d'elles seules.

Le genre de surfaces dont je viens de donner la description, est un cas spécial des surfaces décrites par une courbe plane quelconque, dont le plan roule sur une surface développable arbitraire : on doit à Monge la connaissance des propriétés extrêmement remarquables qui résultent de cette génération ; il les a exposées dans un de ses plus élégants Mémoires (tome VI du *Journal de l'École Polytechnique*).

L'équation aux différences partielles, qui répond au cas général de Monge, est du troisième ordre; celle qui exprimerait la génération particulière dont nous venons de nous occuper ne serait que du second ordre.

On pourrait réduire à un point la surface S_1, et alors la surface développable engendrée par le plan roulant sur S, et passant par le point S_1, ne serait plus qu'un cône arbitraire dont le sommet serait en S_1. Si la surface S se réduisait aussi à des dimensions infiniment petites ou à un point, le plan R, assujéti à passer par la droite SS_1, ne permettrait plus à la courbe λ qu'une simple révolution autour de l'axe de rotation SS_1; il n'y aurait plus d'arbitraire, dans ce mode de génération, que les grandeurs nécessaires pour fixer la position de la courbe λ à l'égard de l'axe de rotation.

En supposant encore le roulement du plan R dirigé par deux surfaces arbitraires S, S_1, si l'on traçait sur ce plan mobile une courbe λ dont la développée λ_1 lui fût égale, mais sans coïncider avec elle; la surface Λ_1 décrite par λ_1, serait toujours le lieu des centres répondant aux lignes de courbures λ de la surface Λ; mais la forme de Λ_1 serait en général très différente de celle de Λ.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville.

PAR M. P.-H. BLANCHET [*].

« Dans le dernier cahier du *Journal de Mathématiques*, vous avez inséré une Note de M. Bertrand [**]. Ce jeune géomètre, qui donne à la science de si brillantes espérances, y a complété une démonstration ingénieuse de M. Cauchy: mais il a, je crois, employé une espèce de continuité vers l'infini que peut-être il vaudrait mieux éviter.

» Au Collége Saint-Louis, en 1836, dans un cours qui avait lieu les vendredis seulement, la même difficulté s'était présentée à mon esprit. J'ai cru l'avoir écartée de la manière suivante :

» D'abord il suffit de vérifier l'indication de la formule dans le cas où la limite cherchée est nulle; car, en renversant, on la vérifiera pour l'infini. Cela posé, on a, dans le voisinage de $x = x_0$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\dfrac{1}{F'(x)}}{\dfrac{1}{f'(x)}} = \frac{\dfrac{F'(\xi)}{[F(\xi)]^2}}{\dfrac{f'(\xi)}{[f(\xi)]^2}},$$

[*] Depuis l'envoi de cette Lettre, M. Duhamel m'a dit qu'il avait présenté à peu près de la même manière la deuxième partie de ma Note dans son Cours lithographié il y a plusieurs années, et que la première partie se trouvait reproduite dans les feuilles imprimées du même Cours, distribuées aux élèves cette année, postérieurement à la remarque de M. Bertrand. Je n'ai pas entre les mains les moyens de faire la comparaison. P.-H. B.

[**] Il s'est glissé dans la Note de M. Bertrand deux fautes d'impression que l'on corrigera à l'aide de l'errata suivant : page 15, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $a = 5(h - h')$, *lisez* $a = h' - 5(h - h')$: page 16, ligne 15, *au lieu de* infini, *lisez* nul. J. L.

en désignant par ξ une valeur comprise entre x et x_0. On tire de là

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{\dfrac{f(\xi)}{F(\xi)}}{\dfrac{f(x)}{F(x)}} \times \frac{f(\xi)}{F(\xi)}, \quad \text{ou} \quad \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \left[\frac{\dfrac{f(\xi)}{F(\xi)}}{\dfrac{f(x)}{F(x)}}\right] \cdot \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Si l'on fait converger x, et à plus forte raison ξ, vers x_0, la quantité $\frac{f(\xi)}{F(\xi)}$ finira par devenir plus petite que $\frac{f(x)}{F(x)}$, qui converge vers o; donc, en général, le rapport

$$\frac{\dfrac{f(\xi)}{F(\xi)}}{\dfrac{f(x)}{F(x)}}$$

finira par devenir plus petit que 1; donc aussi la valeur absolue de $\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ sera plus petite que celle de $\frac{f(\xi)}{F(\xi)}$, ou, à plus forte raison, que celle de $\frac{f(x)}{F(x)}$. Donc, si ce dernier rapport s'évanouit pour $x = x_0$, le premier s'évanouira aussi, ce qu'il fallait prouver.

» On voit, en même temps, que le premier rapport ne sera jamais un infiniment petit d'un ordre moins élevé que le dernier.

» Remarque analogue si la limite cherchée était infinie.

» Le cas exceptionnel de $x_0 = \infty$ n'est pas plus embarrassant. Il suffit de remplacer x par $\frac{1}{z}$; pour $x = \infty$, on aura $z = 0$, qui ne peut faire exception; donc

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{F'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

sous les conditions de continuité par rapport à z. ζ est compris entre z et o, et ξ entre x et ∞.

» D'ailleurs le théorème fondamental de M. Cauchy peut être étendu à ce cas.

» Il est très facile de réunir, si l'on veut, les deux difficultés.

» Permettez-moi, Monsieur, de profiter encore de cette occasion pour vous adresser une démonstration de la possibilité de permuter,

en général, l'ordre de deux différentiations. Elle a été faite pour le même Cours.

» *Lemme.* Si l'on a

$$\lim_{\alpha} \varphi(x, \alpha) = \psi(x),$$

on aura aussi

$$\lim_{\alpha} \varphi'_x(x, \alpha) = \psi'(x),$$

sous les conditions ordinaires de continuité dans le voisinage des valeurs que l'on considérera.

» En effet, on aura

$$\lim_{\alpha} \varphi(x + h, \alpha) = \psi(x + h);$$

par suite

$$\lim_{\alpha} [\varphi(x + h, \alpha) - \varphi(x, \alpha)] = \psi(x + h) - \psi(x),$$

ou, d'après un théorème connu de M. Cauchy,

$$\lim_{\alpha} h\varphi'_x(x + \Theta h, \alpha) = h\psi'(x + \theta h),$$

ou encore

$$h.\lim_{\alpha} \varphi'_x(x + \Theta h, \alpha) = h.\psi'(x + \theta h).$$

On peut diviser par h, que nous supposerons infiniment petit mais non pas nul, ce qui donne

$$\lim_{\alpha} \varphi'_x(x + \Theta h, \alpha) = \psi'(x + \theta h).$$

Or, pour h infiniment petit, le premier membre de la derniere équation diffère infiniment peu de $\lim_{\alpha} \varphi'_x(x, \alpha)$; le deuxième membre differe infiniment peu de $\psi'(x)$, donc la différence entre ces deux quantités est infiniment petite, et, comme elle est constante, elle est nulle. Donc

$$\lim_{\alpha} \varphi'_x(x, \alpha) = \psi'(x).$$

» *Théorème.*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

En effet,

$$\lim_{h} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f'_x(x, y);$$

donc, en vertu du lemme précédent,

$$\lim_{h} \frac{f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)}{h} = f''_{x,y}(x, y).$$

ou

$$f''_{y,x}(x, y) = f''_{x,y}(x, y).$$

Cette démonstration suppose seulement que la dérivée seconde et que les dérivées premieres sont continues dans le voisinage des valeurs que l'on considère. »

(8 mars 1841)

Sur une formule de M. Jacobi;

PAR J. LIOUVILLE.

1. Cette formule donne une expression simple de la différentielle

$$\frac{d^{i-1}.(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}},$$

où i désigne un nombre entier positif quelconque. Pour trouver la différentielle proposée que nous représenterons par θ ou θ_i, on pourrait se servir de la formule connue

$$(1) \qquad \frac{d^\mu.pq}{dz^\mu} = p\,\frac{d^\mu q}{dz^\mu} + \frac{\mu}{1}\frac{dp}{dz}\frac{d^{\mu-1}q}{dz^{\mu-1}} + \ldots,$$

dans laquelle on ferait

$$\mu = i-1, \quad p = (1+z)^{i-\frac{1}{2}}, \quad q = (1-z)^{i-\frac{1}{2}},$$

et par suite

$$\frac{d^m p}{dz^m} = (i-\tfrac{1}{2})(i-\tfrac{3}{2})\ldots\left(i-\frac{2m-1}{2}\right).(1+z)^{i-\frac{2m+1}{2}},$$

$$\frac{d^m q}{dz^m} = (-1)^m(i-\tfrac{1}{2})(i-\tfrac{3}{2})\ldots\left(i-\frac{2m-1}{2}\right).(1-z)^{i-\frac{2m+1}{2}}.$$

Nous suivrons ici une autre marche; mais il nous sera utile d'avoir reconnu que, d'après les calculs indiqués, θ s'évanouit pour $z=1$, tandis que pour cette même valeur $z=1$, le rapport de θ à $\sqrt{1-z^2}$ devient égal à

$$(-1)^{i-1}.3.5.7\ldots(2i-1),$$

cette dernière quantité étant fournie tout entière par le seul premier terme $p\frac{d^{\mu}q}{dz^{\mu}}$ de θ, puisque (à cause du facteur $1-z$ qui s'y trouve affecté d'un exposant au moins égal à $\frac{3}{2}$) le rapport des termes suivants à $\sqrt{1-z^2}$ converge évidemment vers zéro quand z converge vers l'unité.

Posons

$$y = (1 - z^2)^{i-\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dz} = -(2i-1)(1-z^2)^{i-\frac{3}{2}}.z,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -(2i-1)(1-z^2)^{i-\frac{3}{2}} + (2i-1)(2i-3)(1-z^2)^{i-\frac{5}{2}}.z^2,$$

et

$$(2) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + (2i-3)z\frac{dy}{dz} + (2i-1)y = 0:$$

différencions $(i-1)$ fois les deux membres de l'équation (2), et, pour obtenir les différentielles à indice $(i-1)$ des produits

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}, \quad z\frac{dy}{dz},$$

servons-nous de la formule (1) dans laquelle nous ferons $\mu = i-1$, puis successivement

$$p = 1 - z^2 \quad \text{et} \quad q = \frac{d^2y}{dz^2}, \quad p = z \quad \text{et} \quad q = \frac{dy}{dz};$$

rappelons-nous de plus que $\frac{d^{i-1}y}{dz^{i-1}} = \theta$, et nous trouverons sans difficulté

$$(3) \qquad (1-z^2)\frac{d^2\theta}{dz^2} - z\frac{d\theta}{dz} + i^2\theta = 0.$$

En changeant de variable indépendante, on peut toujours faire disparaître le second terme d'une équation linéaire quelconque. Dans le cas de l'équation (3), il suffit pour cela de faire $z = \cos x$: il vient ainsi

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + i^2\theta = 0.$$

d'où

$$\varsigma = A \cos ix + B \sin ix.$$

Pour $x = 0$, z se réduit à l'unité; d'après ce qu'on a vu plus haut, on a donc alors

$$\varsigma = 0, \quad \frac{\varsigma}{\sin x} = \frac{\varsigma}{\sqrt{1-z^2}} = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1),$$

d'où l'on conclut

$$A = 0, \quad iB = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1).$$

De là résulte finalement

$$(4) \qquad \varsigma \text{ ou } \varsigma_i = (-1)^{i-1}.3.5.7\ldots(2i-1)\frac{\sin ix}{i}:$$

c'est la formule que nous voulions démontrer et que M. Jacobi a employée avec succès pour la transformation d'une classe d'intégrales définies. (*Journal* de M. Crelle, T. XV, p. 3.)

2. Voici une seconde démonstration de la formule (4). Cette formule (4) est évidemment exacte quand $i = 1$: il suffit donc, pour en établir d'une manière générale l'exactitude, de faire voir que si elle est vraie pour un indice i quelconque, elle restera vraie encore lorsqu'on augmentera cet indice d'une unité.

Or on a

$$\varsigma_{i+1} = \frac{d^i.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i} = \int_1^z dz\,\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}},$$

d'où, en faisant $z = \cos x$,

$$\varsigma_{i+1} = -\int_0^x \sin x.dx.\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}}.$$

Regardons $(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}$ comme le produit des deux facteurs $(1-z^2)$, $(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}$, et la formule (1) nous donnera

$$\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = (1-z^2)\frac{d^{i+1}\varsigma_i}{dz^2} - 2(i+1)z\frac{d\varsigma_i}{dz} - i(i+1)\varsigma_i.$$

puisque $z = \cos x$, il viendra dès-lors

$$\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = \frac{d^2\theta_i}{dx^2} + (2i+1).\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{d\theta_i}{dx} - i(i+1)\theta_i,$$

de sorte qu'en ayant égard à la valeur de θ_i fournie par la formule (4), on a

$$\frac{d^{i+1}.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = (-1)^{i+1}.3.5\ldots(2i+1).\frac{\cos(i+1)x}{\sin x},$$

d'où

$$\theta_{i+1} = (-1)^i\,3.5\ldots(2i+1)\int_0^x \cos(i+1)x\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{i+1} = (-1)^i.3.5\ldots(2i+1).\frac{\sin(i+1)x}{i+1},$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

3. Pour déduire de la formule (4) la transformation d'intégrales définies dont j'ai parlé plus haut, M. Jacobi observe que quand une fonction w et ses différentielles, jusqu'à l'ordre $(i-1)$, s'évanouissent aux limites de l'intégrale, l'intégration par parties fournit en général

$$\int w\frac{d^iv}{dz^i}dz = (-1)^i\int v\frac{d^iw}{dz^i}dz;$$

en posant donc

$$v = f(z),\quad w = (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}},$$

et prenant -1 et $+1$ pour limites des intégrales, il viendra

$$\int_{-1}^{+1} f^{(i)}(z)(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}.dz = (-1)^i\int_{-1}^{+1} f(z)\frac{d^i(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i}.dz.$$

Or, en différentiant la formule (4), on trouve

$$\frac{d^i.(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^i}dz = (-1)^{i+1}.3.5.7\ldots(2i-1)\cos ix.dx;$$

dès lors, à cause de $z = \cos x$, l'équation précédente fournira

$$(5)\quad \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\sin^{2i}x\,dx = 3.5.7\ldots(2i-1)\int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx;$$

cette belle formule de M. Jacobi avait été déjà transcrite dans ce Journal (T. I, p. 195); elle suppose, comme on voit, que la fonction $f(z)$ et ses différentielles, jusqu'à l'ordre $(i-1)$, restent continues entre les limites $z = -1$, $z = 1$.

4. Si l'on désigne par r un paramètre indéterminé, et qu'on pose

$$f(z) = \varphi(rz),$$

la formule (5) nous donnera

$$\int_0^\pi \varphi(r\cos x)\cos ix\,dx = \frac{r^i}{3.5\ldots(2i-1)}\int_0^\pi \varphi^{(i)}(r\cos x)\sin^{2i}x\,dx;$$

l'intégrale placée dans le second membre peut être décomposée en deux autres, l'une prise de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$, l'autre prise de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$ et que l'on réduira aux limites de la première en y remplaçant x par $\pi - x$. Cela posé, il suffit de jeter les yeux sur une formule que j'ai donnée à la page 58 du XXIVme cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour comprendre combien la transformation de M. Jacobi sera utile dans le calcul des différentielles à indices quelconques.

Observons encore en passant que dans le cas particulier où l'on prend pour $f(z)$ une exponentielle e^{rz}, la formule (5) conduit à une équation simple que l'on peut vérifier de plusieurs manières, et d'où, réciproquement, l'on pourrait tirer soit la formule générale (5), soit la formule (4).

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME DE COMBINAISONS:

PAR E. CATALAN.

De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs, égaux ou inégaux?

J'ai résolu ce problème, pour le cas où les facteurs sont inégaux, dans le tome III de ce Journal, page 515. Or, si l'on change le mot *alphabétique* dans le mot *déterminé*, et si en même temps l'on remplace le nombre des permutations de n lettres différentes, par le nombre des arrangements de n facteurs parmi lesquels il y en aurait α égaux à a, β égaux à b,..., θ égaux à t, etc., on verra que ma solution s'applique complétement au problème actuel; de sorte qu'en désignant par Z_{n+1} ce nombre de manières, on aura

$$Z_{n+1} = \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times \ldots \times 1.2.3\ldots\theta}.$$

Par exemple, le produit de 6 facteurs égaux à a, peut s'effectuer de 42 manières.

On se rappelle peut-être que j'avais traité le cas des facteurs inégaux, à l'occasion de la décomposition d'un polygone en triangles. Au mois de novembre 1838, M. Olinde Rodrigues a inséré dans ce Journal une autre solution du même problème.

Février 1839.

DEUX PROBLÈMES DE PROBABILITÉS;

PAR E. CATALAN.

Ces deux problèmes n'offrent aucune difficulté théorique, mais ils conduisent à des résultats remarquables par leur simplicité.

PREMIER PROBLÈME.

Une urne A *contient* b *boules blanches et* n *boules noires. On en extrait, au hasard,* m *boules que l'on place, sans les connaître, dans une seconde urne* B, *laquelle renferme alors* m *boules, blanches et noires, en proportion inconnue. On tire de cette urne, successivement,* p *boules; et il arrive que toutes sont blanches. Quelle est la probabilité que, faisant un tirage de plus, on obtiendra encore une boule blanche?*

La question présente trois cas différents, selon que m est plus petit que b et n, ou compris entre les deux, ou plus grand que ces deux nombres. Afin d'abréger, je considérerai seulement le premier cas; les deux autres, ainsi que je m'en suis assuré, conduisent au même résultat.

1. Relativement à la composition de l'urne B, avant l'extraction des p boules blanches, on peut établir $m-p+1$ hypothèses. Cette urne pouvait effectivement contenir, savoir :

p boules blanches et $m-p$ boules noires,

ou $p+1$ ..... $m-p-1$ .....,

.....

$m-i$ boules blanches et i boules noires,

.....

ou enfin, m boules blanches.

2. La probabilité que B renfermait primitivement $m-i$ boules

blanches et i boules noires, est proportionnelle à la probabilité d'extraire d'une urne A, contenant b boules blanches et n boules noires, un nombre $m-i$ des premières boules, en m tirages. Elle est proportionnelle aussi à la probabilité d'extraire p boules blanches d'une urne qui en contiendrait $m-i$ blanches et i noires.

3. En posant $b+n=s$, la probabilité de tirer de A, $m-i$ boules blanches et i boules noires, *dans un ordre déterminé,* a pour expression :

$$\frac{b(b-1)\ldots\ldots(b-m+i+1)}{s(s-1)\ldots\ldots(s-m+i+1)}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{(s-m+i)\ldots\ldots(s-m+1)};$$

donc la probabilité de faire cette extraction *dans un ordre quelconque*, sera égale à la quantité précédente, multipliée par le facteur

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots i\times 1.2.3\ldots(m-i)}.$$

En second lieu, la probabilité de la sortie de p boules blanches d'une urne qui en contiendrait $m-i$ blanches et i noires, a pour valeur,

$$\frac{(m-i)(m-i-1)\ldots\ldots(m-i-p+1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}.$$

La probabilité de l'hypothèse en question sera donc proportionnelle à

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-m+i+1)\times n(n-1)\ldots(n-i+1)}{s(s-1)\ldots\ldots(s-m+1)}\times\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots i\times 1.2.3\ldots(m-i)}\times\frac{(m-i)(m-i-1)\ldots(m-i-p+1)}{m(m-1)\ldots(m-p+1)}.$$

ou proportionnelle à

$$\frac{1.2.3\ldots(m-p)\times b(b-1)\ldots(b-p-1)}{s(s-1)\ldots(s-m+1)}\times\frac{(b-p)(b-p-1)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots(m-i-p)}\times\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

Désignons par ϖ_i la probabilité de cette hypothèse, et représentons par A_i la quantité

$$\frac{(b-p)(b-p-1)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots(m-i-p)}\times\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}:$$

nous aurons

$$\varpi_i = \frac{A_i}{\sum_0^{m-p} A_i}.$$

4. Le premier facteur de A_i est le coefficient de $u^{b-m+i} v^{m-i-p}$ dans le développement de $(u+v)^{b-p}$; l'autre est égal au coefficient de $u^{n-i} v^i$ dans $(u+v)^n$. Il est facile de voir que, si l'on multiplie les deux développements, le coefficient de $u^{b-m+n} v^{m-p}$ dans le produit $(u+v)^{b+n-p}$, sera égal à $\sum_0^{m-p} A_i$. On a donc

$$\sum_0^{m-p} A_i = \frac{s-p}{1} \cdot \frac{s-p-1}{2} \cdots \frac{s-m+1}{m-p};$$

et par suite

$$\varpi_i = \frac{b-p \ldots b-m+i+1}{1.2.3\ldots(m-i-p)} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} \times \frac{1.2.3\ldots(m-p)}{(s-p\ldots(s-m+1)}.$$

5. La probabilité de la sortie d'une dernière boule blanche de B, prise *relativement* à l'hypothèse précédente, est $\varpi_i \frac{m-i-p}{m-p}$. Donc la probabilité de l'évènement qui fait l'objet de ce problème sera

$$P = \sum_0^{m-p} \varpi_i \frac{m-i-p}{m-p};$$

ou, en remplaçant ϖ_i par sa valeur, et négligeant la probabilité relative à $i = m-p$, laquelle serait zéro,

$$P = (b-p) \frac{1.2.3\ldots(m-p-1)}{(s-p)\ldots(s-m+1)} \sum_0^{m-p-1} \frac{(b-p-1)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots m-i-p-1} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

6. Le premier facteur sous le signe $\sum$ est le coefficient de $u^{b-m+i} v^{m-i-p-1}$, dans le développement de $(u+v)^{b-p-1}$; le second est le coefficient de $u^{n-i} v^i$ dans $(u+v)^n$. Si l'on multiplie les deux développements, le coefficient de $u^{s-m} v^{m-p-1}$ dans $(u+v)^{s-p-1}$, sera l'expression de $\sum_0^{m-p-1}$. On conclut de là

$$P = \frac{b-p}{s-p}.$$

7. Ainsi, la probabilité d'extraire de l'urne B une boule blanche, après que l'on en a déjà tiré p, est indépendante du nombre de boules que contenait cette urne; elle est la même que celle d'extraire une boule blanche d'une urne qui en contiendrait $b-p$ blanches et n noires. Un raisonnement très simple va servir à vérifier qu'il en doit être ainsi.

Supposons qu'au lieu de prendre m boules de l'urne A, pour les placer, sans les voir, dans l'urne B, nous n'ayons rien changé à la composition de cette première urne. Supposons de plus qu'ayant fait p tirages, nous ayons amené chaque fois une boule blanche : la probabilité d'en extraire encore une au tirage suivant, est $\frac{b-p}{s-p}$. Or, $p+1$ étant au plus égal à m, on peut regarder les p boules déjà extraites, plus celle que l'on va tirer, comme faisant partie d'un groupe de m boules, isolées parmi les s boules de l'urne A. On peut faire, sur la composition de ce groupe, absolument les mêmes hypothèses que l'on ferait sur celle de l'urne B; ce groupe inconnu peut donc remplacer l'urne B, etc.

8. Il est bien évident actuellement, que si, indépendamment des p boules blanches, on avait tiré de l'urne B, q boules noires, la probabilité d'extraire encore une boule blanche, serait la même que si le tirage s'était fait directement dans l'urne A, c'est-à-dire que l'on aurait

$$P = \frac{b-p}{s-p-q}.$$

9. En supposant $b = m = n$, on retombe sur un problème de probabilités inséré dans un autre recueil, et dont la solution est fausse, puisqu'elle conduit à $P = \frac{1}{2}$, tandis que l'on doit trouver $P = \frac{n-p}{2n-p}$.

SECOND PROBLÈME.

Une urne contient b *boules blanches et* n *boules noires; une autre urne renferme* b′ *boules blanches et* n′ *boules noires. On tire au hasard* p *boules de la première urne, et* p′ *boules de la seconde; et l'on réunit ces* p + p′ *boules dans une troisième urne. Quelle est la probabilité d'extraire de celle-ci une boule blanche?*

10. En posant $b + n = s$, $b' + n' = s'$, puis développant un calcul assez long, que je supprime, on trouve pour la probabilité demandée,

$$P = \frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p+p'} + \frac{b'}{s'} \cdot \frac{p'}{p+p'}.$$

11. A l'aide du problème qui précède, on peut arriver à ce résultat d'une manière très simple.

Cherchons la probabilité d'extraire de la troisième urne, une boule blanche provenant de la première. Cette probabilité est celle d'un événement composé; car il faut : 1° que la boule appartienne à la première urne; 2° qu'elle soit blanche.

D'abord, la probabilité que la boule tirée de la troisième urne provient de la première urne, est $\frac{p}{p+p'}$. En second lieu, si l'on avait mis à part les p boules extraites de la première urne, la probabilité de la sortie d'une boule blanche au moyen d'un tirage fait dans ces p boules, serait, par le premier problème, égale à $\frac{b}{s}$ [*].

En multipliant ces deux probabilités simples, on obtient pour la probabilité de la sortie d'une boule blanche provenant de la première urne, $\frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p+p'}$. Et si actuellement on demande d'extraire de la troisième urne une boule blanche, sans déterminer d'où elle doit provenir, on obtient $P = \frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p+p'} + \frac{b'}{s'} \cdot \frac{p'}{p+p'}$, comme ci-dessus.

[*] Cela résulterait aussi d'un Mémoire de M. Mondésir, inséré dans ce Journal, tome II, page 3.

12. Si, au lieu de deux urnes, il y en a m, dont on ait ôté respectivement $p, p', p'', \ldots$ boules pour les mettre dans une dernière urne, la probabilité d'extraire de celle-ci une boule blanche, aura pour valeur,

$$P = \frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p + p' + \ldots} + \frac{b'}{s'} \cdot \frac{p'}{p + p' + p'' + \ldots} + \ldots$$

13. Supposons

$$p = p' = p'' = \ldots;$$

il vient

$$P = \frac{1}{m}\left(\frac{b}{s} + \frac{b'}{s'} + \frac{b''}{s''} + \ldots\right).$$

De là on conclut facilement ce théorème très simple, et qui peut avoir des applications :

Soit un nombre quelconque d'urnes renfermant des boules de différentes couleurs, en quantités déterminées. On tire de chaque urne un même nombre de boules que l'on réunit, sans les voir, dans une dernière urne. La probabilité d'extraire de celle-ci une boule d'une couleur donnée est égale à la probabilité d'amener une boule de cette même couleur en mettant, au hasard, la main dans l'une des urnes, avant l'enlèvement des boules.

(Février 1840.)

THÉORÈME

SUR LA RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR E. CATALAN.

La formule suivante

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,(m\cos\theta + n\sin\theta\sin\omega + p\sin\theta\cos\omega)\sin\theta\,d\theta\,d\omega = 2\pi\int_{-1}^{+1} \varphi\,(\sqrt{m^2+n^2+p^2}\,.\,x)\,dx,$$

que l'on doit à M. Poisson [*], est comprise comme cas particulier dans une autre formule que je vais démontrer, et où l'intégrale double se trouve remplacée par une intégrale multiple.

Soit l'intégrale d'ordre $n-1$,

$$(1)\quad A = \int\!\!\int\ldots dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}\,\varphi\,(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n)\sqrt{1+\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2},$$

dans laquelle les variables reçoivent toutes les valeurs, positives ou négatives, propres à vérifier l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

et dans laquelle aussi, par conséquent, les variables indépendantes satisfont à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1.$$

Cette intégrale revient évidemment à

$$(2)\qquad A = \int\!\!\int\ldots\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{x_n}\,\varphi\,(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n).$$

[*] *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III, page 156.

Pour la réduire, je prends les formules de transformation suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = a_1u_1 + b_1u_2 + \ldots + l_1u_n, \\ x_2 = a_2u_1 + b_2u_2 + \ldots + l_2u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_nu_1 + b_nu_2 + \ldots + l_nu_n; \end{cases}$$

dans ces équations, les coefficients de u_1 sont

$$a_1 = \frac{m_1}{\Delta},\quad a_2 = \frac{m_2}{\Delta},\ \ldots\ldots,\quad a_n = \frac{m_n}{\Delta},$$

en supposant

$$\Delta^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2;$$

les autres coefficients satisfont aux conditions

$$(4)\quad \begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1, \ldots\ l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = 1. \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0, \ldots\ a_1l_1 + a_2l_2 + \ldots + a_nl_n = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots + k_nl_n = 0. \end{cases}$$

Le nombre des coefficients a_1, b_1, etc., dans les formules (3), est $n^2 - n$. Les équations de condition sont en nombre $(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. On pourra donc prendre arbitrairement $n^2 - n - \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, ou $\frac{n(n-3)}{2}$ coefficients.

En ajoutant les carrés des équations (3), et ayant égard aux relations (4), on trouve

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2;$$

donc

$$(5)\quad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 1.$$

Les formules (3) et (4) donnent aussi

$$(6)\quad m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = u_1\Delta;$$

donc, au moyen de la transformation de variables qui vient d'être indiquée, la fonction $\varphi(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)$ devient simplement

$$\varphi(u_1 \Delta).$$

Il nous reste actuellement à transformer la quantité $dx_1 \ldots dx_{n-1}$. Or, M. Jacobi a démontré depuis long-temps [*] que le système de variables employé ci-dessus donne cette relation très simple :

$$\frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{x_n} = \frac{du_1 . du_2 \ldots du_{n-1}}{u_n}.$$

En substituant dans la formule (2), on trouve

$$(7) \qquad A = \int\int \ldots \frac{du_1 . du_2 \ldots du_{n-1}}{u_n} \varphi(u_1 \Delta).$$

Dans cette nouvelle intégrale, les variables doivent recevoir toutes les valeurs réelles satisfaisant à l'équation (5).

Actuellement, remplaçons u_n par sa valeur, et donnons à u_1 une valeur déterminée; nous aurons à évaluer

$$(8) \qquad B = \int\int \ldots \frac{du_2 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \ldots - u_{n-1}^2}},$$

les limites étant données par

$$u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \leqq 1 - u_1^2.$$

On sait [**] que cette intégrale d'ordre $n - 2$, a pour expression

$$(9) \qquad B = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

[*] Journal de M. Crelle, tome XII, page 40. — M. Sturm m'a fait voir que l'on peut arriver facilement à cette relation, en effectuant le changement de variables *successivement*, au lieu de l'opérer en une seule fois.

[**] *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples*, tome IV de ce Journal, page 336.

donc, en substituant dans la formule (7), et doublant le résultat à cause du radical, on obtiendra

$$(10)\qquad A = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\varphi(u_1\Delta)\,du_1\,(1-u_1^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Enfin, en égalant les valeurs (2) et (10), on a ce théorème :

$$(11)\qquad \int\int\ldots\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}}\,\varphi(m_1x_1+\ldots+m_nx_n) = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\varphi(u\Delta)\,du\,(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Si l'on pose $u = \cos\theta$, on obtient, au lieu de la formule (10),

$$(12)\qquad A = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\varphi(\Delta\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta.$$

Lorsque $n = 3$, la formule (11) coïncide avec celle de M. Poisson.

Juin 1850.

NOTE

SUR LA THÉORIE DE LA CONVERGENCE

ET

DE LA DIVERGENCE DES SÉRIES;

Par M. J.-L. RAABE,

Professeur à Zurich

(Extrait du *Journal* de M. Crelle, tome XI, page 309. — Traduction de M. Lebesgue.

Dans le 10e volume du *Journal de Mathématiques et de Physique* rédigé par MM. Ettingshausen et Baumgartner, j'ai démontré le théorème suivant :

« Quand u_n représente le terme général d'une série, et que la limite de l'expression $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$, pour une valeur infiniment grande de n, est égale à k, cette série est convergente ou divergente, selon que k est plus grand ou plus petit que l'unité [*]. »

---

[*] Si M. Duhamel avait eu connaissance de la Note de M. Raabe, écrite en allemand, il aurait reconnu que la règle qu'il donne (tome IV de ce Journal, page 216) revient au théorème de M. Raabe, puisqu'en posant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

il vient

$$\lim. n\alpha = \lim. n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Les personnes qui ont lu l'article de M. Duhamel verront avec plaisir l'extension donnée par M. Raabe à la règle en question.

J.-A. Lebesgue.

Ce théorème peut être employé avec succès pour comparer, sous le rapport de la convergence ou de la divergence, deux séries dont le terme général de l'une est une fonction du terme général de l'autre.

Dans ce cas, soit u_n le terme général d'une des séries, et $f(u_n)$ celui de l'autre, en supposant à la fonction $f(u_n)$ la propriété de ne pas devenir infiniment grande pour une valeur infiniment petite de u_n.

Posons l'équation

$$(1) \qquad k' = \lim. n \left[\frac{f(u_n)}{f(u_{n+1})} - 1 \right],$$

la limite se rapportant à une valeur infiniment grande de n; la série dont le terme est $f(u_n)$ sera convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$k' > 1,$$

ou

$$k' < 1.$$

De l'équation

$$k = \lim. n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$$

on tire

$$\lim. f(u_n) = \lim. \left[f\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} k \right) \right];$$

par là l'équation (1) devient

$$(2) \qquad k' = \lim. n \left[\frac{f\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} k \right)}{f(u_{n+1})} - 1 \right].$$

Si l'on développe $f\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} k \right)$ par la formule de Taylor, on a, eu égard à la propriété supposée à la fonction $f(u_n)$,

$$k' = k \lim. \left[\frac{f'(u_{n+1})}{f(u_{n+1})} u_{n+1} \right].$$

où l'on a fait, pour abréger, $f'(u_{n+1}) = \frac{df(u_{n+1})}{du_{n+1}}$. Si l'on pose

$$\frac{f'(u_{n+1})}{f(u_{n+1})} . u_{n+1} = \mathrm{F}(u_{n+1}),$$

on a

$$k' = k \lim. \mathrm{F}(u_{n+1}),$$

équation qui montre comment k' et k dépendent l'un de l'autre.

Dans le cas particulier pour lequel

$$\lim. \mathrm{F}(u_{n+1}) = 1,$$

on a

$$k' = k,$$

et alors, selon que k est > 1 ou < 1, les deux séries sont à la fois convergentes ou divergentes.

Quand on suppose

$$f(u_{n+1}) = \frac{u_{n+1}^{\alpha}}{(1 - u_{n+1})^{\beta}},$$

on a

$$\lim. \mathrm{F}(u_{n+1}) = \alpha,$$

et par conséquent

$$k' = k\alpha.$$

Soit, par exemple,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1};$$

on tombera sur les deux séries

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

$$\frac{2^w}{1^{w-\alpha}} + \frac{3^w}{2^{w-\alpha}} + \frac{4^w}{3^{w-\alpha}} \ldots\ldots + \frac{n^w}{(n-1)^{w-\alpha}}.$$

où $w = \beta - \alpha$. Comme on a ici

$$k = 1,$$

il en résultera

$$k' = \alpha,$$

et par conséquent la 2e série sera convergente ou divergente, selon que α sera > 1 ou < 1.

Zurich, 25 août 1857.

EXPÉRIENCES

SUR LES

OSCILLATIONS DE L'EAU DANS UNE GRANDE CONDUITE DE PARIS [*];

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

[Présentées à l'Académie des Sciences, le 16 mars 1840.]

Objet de ces expériences.

Il faut, à partir de la naissance du mouvement de l'eau dans un tuyau de conduite, qu'il y ait un certain chemin parcouru relativement au diamètre, pour que le rapport de la vitesse de la couche frottante sur la paroi, à la vitesse moyenne dans un même instant, devienne aussi grand que dans un mouvement parvenu à l'uniformité. En effet, la vitesse ou le retard d'une couche de liquide ne peut pas se transmettre instantanément à la masse totale.

Ce qui vient d'être dit ne doit pas s'appliquer aux vitesses extrêmement petites, à cause des phénomènes de la viscosité qui peut s'opposer à la séparation des filets liquides. Or le seul coefficient du frottement dont on ait à tenir compte dans les vitesses un peu grandes, dépend, comme on sait, du *rapport* dont il s'agit. On voit donc que, sauf pour les oscillations d'une course très petite, ce coefficient doit être moindre dans les mouvements variables que dans le mouvement uniforme, excepté pour les oscillations d'une amplitude assez grande par rapport au diamètre.

Tel est le raisonnement qui m'a guidé dans ces recherches; on conçoit cependant que les frottements pouvant venir d'un système de vibrations ou d'actions moléculaires inconnues, je devais le regarder

[*] Ces expériences ont été faites en novembre 1838. Une Commission de l'Académie des Sciences a exprimé sa satisfaction de ce que M. le Préfet de la Seine a autorisé ces expériences, sur un rapport de M. l'ingénieur en chef Mary. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 522.)

seulement comme une hypothèse probable avant d'en avoir vérifié le résultat par l'expérience.

Description des tuyaux dont on s'est servi pour faire ces expériences [*].

L'eau est conduite des bassins Saint-Victor à un de ceux du Jardin des Plantes, par un tuyau d'environ $212^m,500$ de long et d'un peu moins de 13 centimètres de diamètre, branché à angle droit sur un gros tuyau d'environ 24 centimètres de diamètre qui fait le service dans Paris. Ces tuyaux sont en fonte. La prise d'eau de celui qui alimente le Jardin des Plantes, se faisant à une distance de l'origine du premier qui est d'environ $32^m,60$, et la vitesse n'étant pas trop grande dans le gros tuyau, nous ferons voir que le mouvement pourra être calculé, dans celui qui nous occupe, à peu près comme s'il débouchait immédiatement dans le réservoir Saint-Victor.

Un tube de verre marquait à l'autre extrémité, dans le Jardin des Plantes, le niveau de l'eau *correspondant à la pression sur l'origine du branchement dont il s'agit*, quand on ne faisait pas osciller l'eau dans ce branchement, recourbé verticalement auprès de ce tube.

Or c'est de cette pression *motrice* que nous avons à nous occuper, en étudiant d'abord de quelle manière nos résultats pourront être influencés, pendant l'oscillation dans le branchement, par les vitesses qui en résulteront dans la portion du gros tuyau qui le précède.

Avant le commencement de l'oscillation qui nous occupe, il existe déjà de la vitesse dans cette portion. Or dans chaque instant donné, le carré de la somme de cette vitesse, et de son surcroît résultant dans cette même portion de ce qu'il passe de l'eau dans le branchement, est plus grand que la somme des carrés de ces deux quantités. Si donc nous calculons des pertes de pression motrice dues au frottement dans le gros tuyau, comme si celui-ci était bouché au-delà du branchement, et que le niveau du réservoir moteur fût à la hauteur de celui de l'eau dans le

---

[*] Les personnes qui croiraient avoir besoin d'une figure, pourront avoir recours à celle qui est dessinée tome III, page 209 de ce *Journal*, où l'on expose des principes dont on trouvera ici l'application, et que d'ailleurs on rappellera plus loin d'une manière succincte.

tube de verre à l'autre extrémité, à l'époque où le niveau de ce dernier est en repos stable, nous aurons calculé des diminutions de pression motrice moindres qu'elles ne le sont en réalité.

Si d'après cela, en nous basant sur les coefficients du frottement dans le mouvement uniforme, nous parvenons à une expression du travail en frottement moindre qu'elle ne le serait en tenant compte de tout, et que cependant l'expérience nous conduise à une expression encore moindre, nous n'en serons que plus certains de notre conclusion.

Cette manière de considérer la question permet donc de faire des expériences sur les oscillations de l'eau dans un branchement, même sans qu'il soit nécessaire d'attribuer d'avance une valeur précise à la vitesse dans le tuyau principal qui fait au loin le service par un mouvement continu [*].

Énumération des diverses causes de perte de force vive étrangères au frottement dans le tuyau horizontal, etc., etc.

Je vais faire l'énumération des causes de perte de force vive particulières au système dont je me suis servi. Par la même raison que celle dont je viens de parler, il n'est pas nécessaire de connaître rigoureusement leur valeur, pourvu qu'on soit bien sûr de ne pas les estimer trop haut. En effet, mon but, dans ces expériences, ne pouvait pas être de déterminer rigoureusement un coefficient dont la valeur se trouvait, dans cette localité, confondue avec beaucoup d'autres; mais seulement de chercher si le raisonnement qui m'a conduit à faire ces expériences est bien l'expression d'une loi de la nature.

1°. A l'origine d'un branchement, il y a une perte de pression, *par*

[*] Pendant le retour vers la source, la force vive à l'origine du gros tuyau est un obstacle. Quand cette force vive est éteinte, la colonne qui sort du branchement dans ce même tuyau se divise en deux parties : l'une sert à l'alimentation du gros tuyau en aval, l'autre rentre vers la source. C'est donc surtout à la première oscillation ascendante que s'applique ce que l'on dit dans le texte. Il est possible que, pour d'autres, l'eau parte du repos à l'origine du gros tuyau. Au reste, ces diverses considérations ont évidemment peu d'importance, si les vitesses ne sont pas trop grandes dans ce même tuyau qui, étant d'ailleurs très long, les rend assez petites par son frottement, etc.

les déviations, que MM. Mallet et Genieys ont évaluée, dans leurs expériences sur le mouvement uniforme, dans un seul sens, au double de la *hauteur due* à la vitesse dans le branchement.

2°. A une petite distance de cette origine, il y a un système de trois robinets consécutifs sur le branchement. Leur section est environ les $\frac{2}{5}$ de celle du branchement. Mais comme ils sont disposés dans un même tuyau quadrangulaire, à la suite les uns des autres, ils peuvent être considérés, dans l'évaluation de la perte de force vive, comme ne formant qu'un seul robinet d'environ un demi-mètre de long.

Cependant si j'adopte cette évaluation, c'est, d'après ce qui a été dit, pour ne pas m'exposer à en prendre une trop forte, 1° parce que les trois robinets n'étaient jamais rigoureusement disposés, soit par suite du degré d'enfoncement, soit par suite de l'angle des *clefs,* de manière à ne former par leur ensemble qu'un véritable tuyau quadrangulaire; 2° parce que l'ouvrier, au lieu de faire déboucher ce tuyau quadrangulaire, en amont et en aval, dans un tuyau de diamètre égal à celui du branchement, ne l'y a fait déboucher que par des bouts de tuyau de même section, à peu près, que celle des robinets. Il résulte de là que, malgré les raccordements intérieurs, il y a des causes de contraction de la veine liquide d'autant plus sensibles, que l'*œil* des robinets est la moitié environ plus haut que large. Ainsi le bout de tuyau qui porte les robinets se trouve avoir, en définitive, $0^m,67$ de long; il débouche *brusquement* dans le branchement en amont et en aval, de sorte que les principes ordinaires sur la perte de force vive maximum, dans ces sortes de rétrécissements, doivent lui être appliqués sans restriction, puisqu'il n'y a pas de raccordements à ses deux extrémités [*].

3°. Le branchement étant presque horizontal, ne pouvait se raccorder avec un tuyau vertical, dans le Jardin des Plantes, que par un tuyau coudé. Or ce tuyau coudé, d'ailleurs assez arrondi, avait un diamètre qui était seulement les $\frac{4}{5}$ de celui du branchement. Ce coude n'étant pas rigoureusement en arc de cercle, il serait difficile d'évaluer minutieuse-

[*] La perte de force vive provenant des étranglements doit être en général calculée d'après la méthode de Borda, adoptée par M. Navier. Je l'ai constatée par des expériences directes, dont je donnerai le détail dans un autre article. L'évaluation de MM. Eytelwein, d'Aubuisson, etc., serait d'ailleurs à l'avantage de mes conclusions.

ment sa résistance, d'ailleurs peu importante, par rapport à la somme de toutes les autres. On peut la calculer comme s'il eût été en arc de cercle de $0^m,50$ de diamètre. Il faut en outre tenir compte de ce que le tuyau de plomb sur lequel était pris ce coude, avait une longueur d'environ $1^m,60$, et de ce que le frottement est en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres.

4°. Ce tuyau de plomb se joignait à une tubulure de même diamètre, disposée sous une soupape d'une espèce particulière, dont la chambre portait elle-même en-dessus une seconde tubulure, aussi de même diamètre, sur laquelle on adaptait successivement différents tuyaux d'ascension, dont chacun avait un diamètre constant. Or quand ces tuyaux d'ascension n'avaient pas le même diamètre que cette tubulure, il y avait ou une contraction ou un évasement brusque de la colonne.

5°. Il fallait tenir compte du frottement dans ces tuyaux d'ascension, quand ils étaient d'un diamètre moindre que le reste du système, ce frottement étant en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres.

6°. Il y avait une cause de perte de force vive dans le passage par la soupape. Pour que l'on pût facilement tourner celle-ci, je ne l'avais point disposée en clapet ordinaire, mais elle tournait autour de son centre de figure, à la manière d'une *clef de poêle*. Or comme on n'avait pas encore exécuté de soupape de ce genre, l'ingénieur avait désiré y établir une articulation intérieure, qui augmentait les dimensions de sa chambre. Il résultait de là que la colonne liquide déjà étranglée dans le tuyau de plomb, avait à traverser, avant d'arriver à la tubulure supérieure, une chambre d'une hauteur et d'un diamètre à peu près doubles de celui des tubulures. Il n'est pas nécessaire d'en donner un dessin pour l'objet qu'on se propose ici.

J'ai depuis exécuté cette soupape sans articulation, et en me débarrassant de cette cause de perte de force vive; mais ne l'ayant fait que pour un diamètre moindre, je me suis contenté des résultats obtenus au moyen de la première.

7°. Quoique l'on tournât la soupape très vite, comme l'eau montait aussi très vite dans le tuyau disposé en dessus qui en contenait peu à cette époque, il y avait un étranglement momentané variable, sur une longueur de chemin parcouru, très comparable au diamètre de la tubulure.

8°. Dans une conduite rectiligne *en service*, l'air est toujours mieux expulsé que dans un tuyau qu'il fallait fermer pendant l'intervalle des expériences, pour ne pas perdre inutilement l'eau de la ville. On s'est au reste assuré, surtout par la régularité des ascensions et par la marche générale des résultats, que cette cause de perte ne devait pas être tres importante, malgré les petites anomalies.

9°. Il y avait de légères pertes d'eau et je me suis assuré, par le moyen d'orifices pratiqués successivement sur la colonne, que ces pertes diminuaient bien réellement la hauteur des oscillations, comme il est facile de s'en rendre compte. Mais cette cause de perte de hauteur n'était pas non plus essentielle, et n'avait pas d'ailleurs la même influence pendant l'oscillation descendante.

10°. Les tuyaux partiels, à la pose desquels j'avais assisté, en mesurant leur diamètre, s'emboîtaient comme à l'ordinaire les uns dans les autres, au moyen de renflements, tandis que les tuyaux de Grenoble, sur lesquels M. Gueymard, *Annales des Mines*, 1829, a vérifié les formules de Prony, se rapprochaient davantage, dans leur mode d'assemblage, des petits tuyaux de Bossut et de Dubuat.

11°. Il y a un coude sur le gros tuyau qui part directement du bassin Saint-Victor, mais, *par prudence*, nous ferons abstraction des diverses résistances passives dans cette portion de l'appareil, etc., pour ne pas nous exposer à les exagérer dans nos comparaisons avec le mouvement uniforme.

Détails sur la méthode d'expérience.

J'ai déjà parlé d'un tube de verre branché au-dessous de la soupape, auprès du tuyau d'ascension, et s'élevant de façon à indiquer la pression motrice à l'origine du branchement avant l'expérience. Quand on voulait considérer des oscillations, on bouchait ce tube de verre avec un robinet particulier, afin d'éviter la perte de travail provenant des oscillations de l'eau dans son intérieur. Son diamètre était de $0^m,013$, afin qu'on n'eût pas à s'occuper sérieusement de la dénivellation provenant de la capillarité.

Un autre tube de verre, de même diamètre, portant également un robinet, était disposé au bas du tuyau d'ascension, un peu au-dessus de la soupape, afin de marquer aussi le niveau de l'eau dans un tuyau

de décharge, recourbé en siphon renversé. De cette manière on était sûr du point de départ de la surface de l'eau, et de sa tranquillité au moment de ce départ; de plus on n'avait pas à s'embarrasser des mouvements de l'air, qui auraient eu lieu si l'eau avait périodiquement abandonné la chambre de la soupape. On avait soin de fermer le robinet de ce tube au moment où l'on ouvrait la soupape, pour permettre à l'eau de monter dans le tuyau d'ascension. Quand on avait achevé l'expérience, on vidait le tuyau d'ascension en tournant simplement la soupape, dont il est inutile de donner ici une description détaillée, pourvu qu'on en voie bien l'objet.

Le tuyau d'ascension était maintenu vertical, au moyen d'un plancher mobile sur trois montants. Ce tuyau était toujours plus élevé qu'il ne le fallait pour que la colonne liquide ne pût pas sortir par le haut, afin que l'on pût exactement marquer la hauteur obtenue par l'eau au-dessus du niveau de la source. Au moyen de règles divisées, on mesurait successivement les hauteurs, de moins en moins grandes, obtenues par la surface de la colonne oscillante. Comme il était important de s'assurer d'une régularité convenable, j'avais eu non-seulement la précaution de répéter chaque expérience au moins dix fois, mais de vérifier moi-même les hauteurs obtenues, en faisant redescendre à ma place un aide intelligent, auquel j'avais fait répéter la manœuvre plusieurs fois. Je ne me suis fié entièrement à lui, c'est-à-dire sans monter moi-même à sa place, que pour la quatrième série d'expériences, relative aux très petites vitesses, après en avoir vérifié d'ailleurs le premier chiffre, parce qu'elles avaient moins d'importance pour mes machines. Cette série est du reste suffisamment régulière.

Pour m'assurer si l'on tournait la soupape assez vite, j'avais pratiqué sur le tuyau d'ascension, un peu au-dessus de la surface de l'eau au moment du départ de la colonne ascendante, de petits orifices à un demi-décimètre les uns au-dessus des autres.

Ces tuyaux d'ascension étaient en fort zinc. La soupape était disposée de manière à ce qu'étant entrouverte, elle permettait, quand on voulait, à l'eau de Saint-Victor de sortir avec force dans le bassin de décharge du Jardin des Plantes, en lavant le tuyau et le dégageant de ses bulles d'air. On prenait toujours cette précaution avant de commencer l'expérience.

Exposé succinct des moyens de calcul.

Dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie le 10 juillet 1837, et qui a été publié en partie dans le tome III de ce Journal, page 209, j'ai établi la formule suivante, pour exprimer le rapport de la hauteur obtenue dans le tuyau d'ascension au-dessus du niveau du réservoir moteur, à cette hauteur dépouillée de l'effet des résistances.

x est ce rapport dans un tuyau d'ascension cylindrique;

C le chemin parcouru, dans un long tuyau horizontal [*], depuis le départ de l'oscillation ascendante, jusqu'à ce que l'eau arrive au niveau du réservoir moteur supposé constant;

D le diamètre du tuyau horizontal;

d le diamètre du tuyau d'ascension;

F une constante dépendant de l'intensité des résistances passives.

On trouve, par la géométrie, la formule suffisamment approchée pour des vitesses qui ne sont pas trop petites, et des valeurs de $\frac{C}{D}$ et de $\frac{D}{d}$ qui ne sont pas trop grandes,

$$x = \frac{1}{\frac{C}{D}F + 1}.$$

Il est clair que C est en raison de $\frac{D^2}{d^2}$, et qu'il faut d'ailleurs, quand le diamètre du tuyau d'ascension est trop petit, par rapport à l'autre, tenir compte de l'augmentation qui en résulte dans la quantité F, fonction du travail résistant en frottement, etc.

Il est d'autant plus inutile de rappeler ici la démonstration de cette formule, que M. Coriolis l'a démontrée depuis d'une autre manière dans le même volume de ce Journal, page 437.

En discutant les expériences connues sur le mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite, j'avais pris pour F une valeur approchée peu différente de celle qu'il a adoptée, comme un peu trop

[*] Dans le Mémoire dont on vient de parler, j'avais désigné par L ce qu'il est plus convenable de désigner par C, parce qu'il ne s'agit que d'un chemin parcouru, la longueur du tuyau disparaissant du résultat à cause de la compensation dans la moyenne des carrés des vitesses quand celles-ci ne sont pas trop petites, comme je l'ai développé dans le Mémoire dont il s'agit.

forte, pour le cas où les coefficients des frottements seraient les mêmes que dans le mouvement uniforme *à grandes vitesses*, et qui est $\frac{1}{51}$, en ne s'occupant pas de ce qui se passe quand le tuyau d'ascension est trop étroit pour que l'on puisse négliger son frottement.

Dans le même Mémoire, je suis parvenu au résultat suivant très commode pour les observations.

Abstraction faite du frottement dans le tuyau d'ascension, supposé assez court par rapport au tuyau horizontal, si la résistance passive à chaque instant n'était proportionnelle qu'aux simples vitesses, les oscillations diminueraient successivement de hauteur au-dessus du réservoir, comme les termes d'une progression géométrique. Si l'un des termes de la résistance est proportionnel aux carrés des vitesses, les oscillations diminueront moins rapidement; elles diminueront au contraire plus rapidement s'il y a un terme indépendant des vitesses.

Une autre règle fournit un moyen très commode d'observer ce qui se passe dans les très petites vitesses, sans diminuer les hauteurs des oscillations. Les vitesses n'étant pas d'ailleurs les mêmes au centre qu'à la paroi, il est toujours prudent de ne pas trop compter sur les hauteurs à quelques millimètres près, quoique, pour un tuyau d'ascension vertical, la surface de la colonne oscillante parût assez sensiblement horizontale même quand elle était très large, les vitesses ascensionnelles n'étant pas très grandes.

Cette règle consiste en ce que, si le tuyau horizontal est très long, par rapport au tuyau vertical ou d'ascension, les durées des oscillations sont en raison du rapport du diamètre de celui-ci au diamètre de l'autre, ainsi que la vitesse moyenne dans ce tuyau horizontal.

La longueur du pendule, dont les oscillations seraient égales en durée à celles de la colonne moyenne, est à peu près double de ce qu'elle serait pour un siphon renversé de diamètre constant, en supposant ici le tuyau d'ascension d'un diamètre égal à celui du tuyau horizontal, si celui-ci débouchait directement dans le réservoir.

Ainsi, dans le cas présent, ce pendule aurait plus de $212^{m},50$, parce qu'il faut tenir compte du tuyau coudé, de la colonne variable contenue dans le tuyau d'ascension, et de ce que le tuyau horizontal ne débouche pas directement dans le réservoir, mais par une portion de tuyau d'un diamètre, il est vrai, beaucoup plus grand, ce qui réduit à peu de chose

l'importance de la force vive contenue dans cette portion. J'ai d'ailleurs toujours disposé mes expériences de façon à ne point établir de conclusions au moyen de légères différences dans diverses séries. Je ne me suis permis d'en établir qu'au moyen de phénomènes qui, étant suffisamment répétés, n'exigeaient point d'habileté dans l'expérimentateur.

Les vitesses moyennes du niveau oscillant ne sont point proportionnelles aux courses de chaque oscillation dans le tuyau horizontal. Pour des chemins égaux dans ce tuyau, la course dans le tuyau d'ascension est d'autant plus *profonde* que celui-ci est plus étroit, d'où l'on conclut que c'est pour les tuyaux d'ascension les plus étroits que la vitesse moyenne est la plus grande dans le tuyau horizontal. Cette remarque était essentielle, parce que les longueurs des courses *dans le tuyau horizontal* sont, ainsi que les vitesses, des éléments qui influent, comme on verra, sur les coefficients des frottements de l'eau contre la paroi.

Résultats des calculs faits sur le tableau d'expériences.

En comparant la marche des décroissements de hauteur des oscillations, dans la première et dans la dernière série d'expériences, on voit que ces décroissements sont, dans leur ensemble, à peu près aussi rapides pour celle-ci que pour l'autre, quoique le tuyau d'ascension étant plus étroit, la quantité C soit moindre.

Cela indique que s'il n'y a pas, dans l'expression de la résistance, un terme constant indépendant des vitesses, il y a au moins dans les très petites vitesses une espèce toute particulière de résistance. Je l'avais déjà remarqué dans les *Annales des Mines*, t. XIII, en discutant les expériences faites, malheureusement très en petit, sur les oscillations de l'eau dans les siphons, par Dubuat, et dans le raisonnement placé en tête de cet article j'en ai rappelé la raison. Ce n'est donc que pour les vitesses et les courses, suffisamment grandes dans le tuyau horizontal, que nous pouvons étudier la diminution des coefficients ordinaires du frottement dans le mouvement oscillatoire.

Quant à ces très petites vitesses, dont au reste les ingénieurs n'auront pas en général à s'occuper dans la construction des machines oscillantes, on ne doit pas s'attendre à y voir une résistance rigoureusement indépendante de la vitesse, puisqu'il est évident que l'ordre des vitesses des

filets du centre à la paroi dépend du chemin parcouru à partir de la naissance du mouvement oscillatoire, et qu'il n'y a rien, par conséquent, de constant dans les vitesses relatives de séparation intérieure.

Reprenant la première série d'expériences, on trouve que le déchet total dans la hauteur peut être expliqué, à la rigueur, comme s'il n'y avait pas de terme bien sensible de la résistance en frottement, fonction des simples vitesses. Ce terme existe cependant, nous avons vu qu'il se manifeste dans les très petites vitesses; et en discutant la seconde série d'expériences, *où les vitesses sont plus grandes que dans la première*, on trouve que le déchet ne peut être expliqué sans avoir recours au genre de résistances qui le constituent.

Il résulte de là que le terme proportionnel aux carrés des vitesses était diminué quand le chemin parcouru, à chaque oscillation, dans le tuyau horizontal, n'était qu'une vingtaine de fois le diamètre de celui-ci; mais que cela cessait d'être vrai pour un chemin triple à chaque oscillation.

Ce résultat de l'expérience confirme celui que j'avais indiqué par le raisonnement ci-dessus, sans pouvoir, il est vrai, annoncer exactement dans quelles limites il devait être vérifié.

Le même raisonnement faisait pressentir aussi une diminution dans le terme proportionnel aux simples vitesses, mais une diminution moins importante, parce qu'elle dépend d'un rapport simple, au lieu de dépendre de son carré.

Or, dans la première série, on trouve que ce terme serait bien suffisant pour expliquer le déchet, si son coefficient n'était pas moindre que dans le mouvement uniforme. Il diminue donc aussi, quoique nous ne puissions pas séparer complétement sa valeur de celle des autres [*].

On voit d'après cela qu'il doit être avantageux, abstraction faite de toute élévation d'eau, de pouvoir conduire de l'eau *par un mouvement variable*, mais cela ne peut être vrai que dans de justes limites.

---

[*] L'ensemble des résultats du tableau suffirait pour rassurer sur les causes d'erreur dont on a parlé dans la note de la page 91, etc.

En disant qu'au moins les premières oscillations de cette série peuvent être expliquées au moyen d'un seul des deux termes ordinaires de la résistance en frottement, j'aurais dû ajouter que c'est même en estimant à un ou deux dixièmes au plus de la résistance totale, la somme des diverses résistances étrangères énumérées p. 91-94. Mais cette évaluation, que je donne ici sans entrer dans des détails, parce qu'elle est peut-être trop faible, ce qui est d'ailleurs à l'avantage de mes conclusions, p. 94, n'est pas même nécessaire ici. En effet, d'après les évaluations de M. de Prony pour le mouvement uniforme, il est facile de voir que, dans cette série d'expériences, le terme proportionnel aux simples vitesses devrait être toujours au moins aussi grand que le terme proportionnel aux carrés. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, il y a à peu près moitié plus d'avantage à conduire l'eau par un mouvement variable que par un mouvement uniforme, *dans les limites de ces expériences, si les coefficients de M. de Prony sont exacts.*

Or, si l'on considère que, dans les petites vitesses, le troisième terme quelconque dépendant de la viscosité dénature le mode de glissement des filets, il semblera probable que, pour des colonnes *plus larges et moins longues,* et par conséquent pour des vitesses plus grandes, le coefficient principal du frottement est diminué encore bien davantage. Tel est un des résultats que je desire constater en faisant des expériences sur une machine *à flotteur oscillant,* qui a été l'objet d'un rapport favorable à l'Académie des Sciences, le 13 janvier 1840.

La troisième série d'expériences présente un ensemble de valeurs qui se lient aux autres séries, d'une manière assez continue, en ayant égard à ce que j'ai dit sur les vitesses moyennes, qui ne sont pas toujours les mêmes à courses égales dans la conduite horizontale.

La durée des oscillations n'est pas changée par les résistances passives d'une manière assez notable pour être remarquée. L'observation de cette durée a l'avantage, applicable précisément à des circonstances analogues, de permettre, au moyen des dimensions du tuyau d'ascension, de constater approximativement l'état ou la longueur d'une conduite enfoncée sous terre. Si, par exemple, le branchement horizontal, que j'ai considéré comme l'objet principal de mes expériences, se prolongeait jusqu'au réservoir moteur, au lieu de s'embrancher sur une portion de tuyau d'un diamètre beaucoup plus grand, le pendule qui

ferait ses oscillations dans un temps égal à celui des oscillations de la colonne, aurait, comme je l'ai dit, toute la longueur développée du système jusqu'à ce réservoir, si le tuyau d'ascension avait le même diamètre.

On peut encore, par un moyen analogue, découvrir si le déchet d'une conduite provient d'un dépôt régulier, car cela correspond à une augmentation du rapport de la section du tuyau d'ascension à celle de la conduite.

Je dois d'ailleurs prévenir que la mesure *rigoureuse* de la longueur d'une conduite n'est point indispensable dans ces expériences sur le frottement de l'eau dans les oscillations, puisque si la conduite est plus longue, les vitesses frottantes sont moindres, et que cela ferait même rigoureusement compensation quant au travail résistant en frottement dans un tuyau de diamètre constant, si le frottement était à chaque instant proportionnel au carré de la vitesse de la surface.

Quant aux portions élargies, soit à l'origine, soit au-dessus de la soupape, le frottement étant en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres, et ces portions n'étant que des fractions assez peu considérables de la longueur totale développée, il est clair que nous n'avons pas à nous en occuper, dans un genre d'expériences où l'on ne tire des conséquences qu'au moyen de résultats qui, s'ils étaient faux, le seraient du simple au double, et qui s'accordent dans leur marche générale.

Je dois prévenir aussi que, n'ayant pas de montre à secondes à l'époque où je fis ces expériences, presque toutes indépendantes de la mesure du temps, je me contentais d'observer assez d'oscillations pour qu'elles fussent comprises dans un nombre rond de minutes, en négligeant les petites erreurs à peine sensibles qui résultaient de ce mode d'observation.

Les tuyaux d'ascension ne pouvant être, comme on le pense bien, rigoureusement cylindriques, cela pourrait induire dans de légères erreurs, si l'on ne considérait pas plusieurs oscillations. Mais il est clair que ces petites erreurs se détruisent en partie, dans chaque groupe de deux oscillations, c'est-à-dire entre deux chiffres du tableau, puisqu'il y a une descente et une ascension.

La hauteur de l'eau du bassin Saint-Victor, au-dessus de l'origine du

branchement de $212^m,50$ environ de long, dont je me suis servi, n'a pas été mesurée exactement, mais elle était d'environ 8^m. Ce tuyau s'élève, comme je l'ai dit, par une pente douce, jusqu'au Jardin des Plantes, à l'entrée duquel il monte d'une manière plus sensible. Pendant l'oscillation, la pression sur l'extrémité est alternativement plus faible et plus forte que pendant l'équilibre.

Ainsi, en définitive, les pressions sont très comparables à la pression atmosphérique, observation indispensable qui n'avait pu être faite dans les petits siphons de Dubuat.

Malgré cette hauteur de pression, nous trouvons, pour les résistances passives, des coefficients, moindres que les expérimentateurs ne les ont trouvés pour le mouvement uniforme dans les tuyaux de fonte; on n'a donc aucune raison de penser que ces résistances soient ici fonction de la pression comme dans le frottement des corps solides.

CONCLUSIONS.

Il y a, à la naissance du mouvement, une espèce toute particulière de résistances passives, qui correspond sans doute à la constante trouvée par divers auteurs dans le mouvement uniforme.

Mais bientôt les filets liquides glissent les uns sur les autres, selon une loi qui change le mode d'action des résistances passives. Les deux termes de l'expression de la résistance en frottement dans le mouvement uniforme sont diminués en somme d'environ moitié, *si les coefficients de M. de Prony sont exacts*, et c'est le terme proportionnel aux carrés des vitesses qui paraît être le plus diminué.

Ainsi, pour le mouvement oscillatoire de l'eau dans les tuyaux de conduite, les coefficients des frottements sont moindres que dans le mouvement uniforme, quand les vitesses ne sont pas excessivement petites. Mais il ne faut pas perdre de vue que cela est vrai seulement dans le cas où les amplitudes ou courses des oscillations ne sont pas trop grandes par rapport au diamètre de la conduite. Si cette course dépasse certaines limites, il finit par s'établir un mode de glissement intérieur qui se rapproche de celui du mouvement uniforme. Alors il est prudent de ne plus compter sur la diminution des coefficients des frottements, même quand les vitesses sont grandes.

Il ne paraît pas que la pression exerce d'influence sensible sur les

frottements. Quant aux durées des oscillations, elles sont sensiblement indépendantes des résistances passives.

Ces conclusions me semblent devoir être considérées, abstraction faite des machines de mon invention, comme applicables à l'hydraulique pratique. Cependant il faut remarquer que les plus grandes vitesses *moyennes* considérées dans cette Note n'étaient pas de $0^m,4$, quoique la loi générale me semble incontestable.

Nota. Depuis que ces conclusions sont imprimées, j'apprends que M. Mary, ingénieur en chef directeur des eaux de Paris, a fait des expériences inédites sur le mouvement permanent de l'eau dans des tuyaux de conduite de trois à quatre décimètres de diamètre et de trois à quatre mille mètres de long, où le débit, calculé par les formules de Prony, était augmenté d'environ un cinquième, pour diverses vitesses que l'on rencontre dans la pratique, et dont les plus grandes étaient de près de 1 mètre par seconde. On conçoit que des formules établies au moyen de tubes d'un petit diamètre, ou de tuyaux plus ou moins obstrués, peuvent bien avoir donné des résistances trop fortes. Or, un cinquième d'augmentation dans le débit réduisant aux deux tiers environ la somme des coefficients des résistances passives, on pourrait croire que le résultat de la présente Note provient simplement d'une erreur dans les coefficients Prony. Il est donc essentiel de remarquer que ces coefficients se sont retrouvés en entier dans mes expériences, quand le chemin parcouru à chaque oscillation dans le tuyau de treize centimètres de diamètre, était une soixantaine de fois ce diamètre. Je n'examine pas en ce moment si cela provenait des résistances étrangères au frottement. J'insiste seulement sur ce que, pour des courses moindres, les coefficients des résistances passives étaient réellement *diminués par la nature du mouvement oscillatoire;* et je pense que si, dans des tuyaux de dimensions beaucoup plus grandes, ils ont été réduits aux deux tiers pour le mouvement uniforme, ils pourront être réduits à un tiers pour le mouvement oscillatoire, ce qui permettra d'élever l'eau à des hauteurs triples de celles que j'avais d'abord calculées, dans la machine de mon invention, qui a été l'objet d'un Rapport et d'un Mémoire de M. Coriolis, tome III de ce Journal, page 437.

Diamètre du tuyau d'ascension.	Hauteur du niveau de l'eau dans le tube de verre supérieur au-dessus du niveau de l'eau au bas du tuyau d'ascension, avant le commencement de l'oscillation.	Hauteurs obtenues successivement au-dessus du niveau de l'eau du tube de verre supérieur. On a négligé *par prudence* les millimètres, pages 94 et 97.	Durée des oscillations.
$0^m,105$	$2^m,33$	1,83 1,27 0,97 0,74 Pour une diminution de $0^m,2$ sur la hauteur de la deuxième colonne il y a une diminution d'environ $0^m,15$ sur ce premier chiffre ; les suivants diminuent selon une loi analogue [*].	5 oscillations environ par minute.
$0^m,20$	$2^m,054$	0,97 0,51 0,37 0,257 Pour des hauteurs de la deuxième colonne un peu moindres, on a trouvé des oscillations d'une hauteur un peu moindre, mais diminuant selon une loi analogue.	Durée à peu près double de celle des oscillations de la série précédente.
$0^m,16$	$2^m,2$	1,38 0,80 0,62 Même observation que pour la série précédente.	A peu près une fois et demie la première.
$0^m,08$		1,89 1,38 1,08 0,80 Même observation que pour les deux précédentes séries.	

[*] Le déchet total a été, plusieurs fois, moindre qu'on ne l'indique dans l'un et l'autre cas, surtout relativement à la dernière oscillation.
Quant à la première oscillation, on s'est assuré, par des expériences préliminaires, que les mouvements intérieurs, causés par la soupape, n'avaient pas beaucoup d'importance relativement à la hauteur obtenue.

SUR LE

MAXIMUM ET LE MINIMUM DES FIGURES DANS LE PLAN, SUR LA SPHÈRE ET DANS L'ESPACE EN GÉNÉRAL;

PAR J. STEINER,

Membre de l'Académie de Berlin (*).

PREMIER MÉMOIRE.

On ne s'est pas assez appliqué jusqu'ici à vaincre les difficultés qui se présentent quand on recherche les propriétés des figures géométriques qui donnent lieu à des *maxima* et à des *minima*, ou du moins on n'a pas été heureux dans les tentatives faites dans cette direction. Or il existe deux méthodes pour traiter cette matière : l'une d'elles, la méthode synthétique, réputée insuffisante, a été de nos jours presque entièrement négligée; on ne s'est guère occupé que de l'autre, de la méthode analytique, que l'on croyait préférable sous tous les rapports. Mais il y a bien des cas où les règles générales que l'analyse fournit ne conduisent ni directement, ni facilement au but; il y en a d'autres où elle ne paraît pas propre à faire découvrir la cause, l'origine du maximum et du minimum; elle ne s'attache alors qu'à des propriétés secondaires, qui sont liées plus ou moins intimement à cette cause primitive, mais qui ne la cons-

(*) Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 15 mars 1841 : l'auteur l'a composé en langue allemande; nous devons à l'obligeance de M. le docteur *Wertheim* la traduction qu'on imprime ici. (J. L.)

tituent pas. Il semble donc utile de changer de route et de recourir à l'ancienne méthode, mal à propos abandonnée.

Quoiqu'il soit impossible d'établir un principe unique applicable également à toutes les matières que nous aurons à traiter, on verra pourtant qu'il existe un certain nombre de propriétés fondamentales, d'où découlent autant de séries de théorèmes, intimement liés les uns aux autres. C'est ainsi qu'on est souvent conduit à des théorèmes qui ne sauraient être démontrés qu'avec une très grande difficulté, quand on les attaque isolément par la voie directe; par exemple, les théorèmes des n^{os} **62** et **65** du Mémoire qui suit. Les propriétés fondamentales une fois établies, les théorèmes en dérivent, pour ainsi dire, comme d'une source commune, qui laisse apercevoir leur dépendance mutuelle, ce que nous considérons comme tout aussi important, tout aussi utile pour le progrès des sciences, que la découverte même des théorèmes.

On doit à *Lhuilier* [*] les recherches les plus étendues sur les *maxima* et *minima* dans la Géométrie envisagés sous un point de vue élémentaire; la méthode synthétique lui a semblé mieux convenir à ce genre de recherches. En résumant tout ce que ses devanciers avaient découvert, à partir des Grecs jusqu'à *R. Simson* et autres, il a corrigé, avec sa sagacité ordinaire, tout ce qui s'y trouvait de faux, et il a fait faire lui-même un grand pas à cette partie de la science. Il est bien à regretter que ses successeurs aient cru devoir abandonner cette marche si naturelle; on cite bien quelquefois son ouvrage, on lui emprunte même quelques exemples, mais on néglige entièrement sa méthode; et ceux mêmes qui tenaient encore à la synthèse géométrique (*Legendre*, *Hirsch*, etc.), tout en conservant ses théorèmes, ont rejeté les démonstrations simples qu'il en avait données. Mais il est arrivé de là aussi que la belle simplicité, l'extrême élégance des démonstrations s'est bientôt perdue, que l'on a cessé d'apercevoir la liaison intime qui subsiste entre les théorèmes, et que tout développement ultérieur de cette doctrine a été ainsi arrêté. Bien plus, séduits par la facilité que donne le calcul pour résoudre

---

[*] *De relatione mutuâ capacitatis et terminorum figurarum*, etc. *Varsoviæ*, 1789; et *Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire*, etc.

certaines classes de questions relatives aux *maxima* et *minima*, quelques géomètres ont même conseillé l'abandon entier de la synthèse, pour se livrer uniquement à la voie plus facile de l'analyse. Mais c'était exagérer dans un sens, comme *Lhuillier* lui-même l'avait fait dans l'autre, quand il prétendait que beaucoup de théorèmes ne pouvaient pas être démontrés au moyen du Calcul différentiel. Nous croyons que les deux méthodes, bien loin de s'exclure et de se repousser mutuellement, sont au contraire indispensables pour vaincre les grandes difficultés de la matière, et conduire ainsi à la solution des nombreux problèmes qui restent encore à traiter; une fois le but atteint, il sera toujours temps de comparer entre elles ces deux méthodes et les services qu'elles auront pu rendre.

Aucune branche de la Géométrie ne paraît soumise en effet à autant de difficultés que celle dont il s'agit : quand on croit avoir trouvé une méthode directe et générale, on rencontre à l'improviste, à côté de problèmes très simples, des problèmes qu'elle aborde à peine ou même qu'elle ne peut pas résoudre; et ici le succès dépend tellement du point de vue auquel on se place, que souvent des difficultés qui paraissent insurmontables par certains moyens, disparaissent dès qu'on les attaque par un autre en quelque sorte trivial. Tel est, par exemple, le théorème du n° **26**, relatif aux figures sphériques. Et ceci est également vrai pour des systèmes entiers de propositions comme pour des théorèmes isolés.

Je pense avoir choisi la route la plus avantageuse pour certaines classes de *maxima* et *minima;* car je suis parvenu à des théorèmes fondamentaux, d'où un grand nombre de solutions découlent d'une manière élégante et facile; mais il est bien des questions, principalement parmi celles relatives aux figures dans l'espace, dont la solution m'a échappé et semble exiger des moyens nouveaux. C'est pour ce cas surtout que les deux méthodes se réuniront avec avantage; la méthode synthétique aura à fournir des bases solides, à établir les théorèmes fondamentaux, à montrer enfin à l'analyse le chemin qu'elle doit suivre pour pouvoir déployer librement toute sa force, et pour discuter ultérieurement les questions proposées; aussi est-ce là la marche que l'on a généralement suivie sans toujours l'avouer.

J'ai déjà publié plusieurs extraits de mes recherches concernant

les *maxima* et *minima* en géométrie [*]. Le Mémoire suivant a pour objet les relations entre les aires et les périmètres des figures dans le plan et sur la sphère; il a trait à la première des cinq méthodes que j'ai suivies dans ces recherches, et qui toutes sont applicables aux figures planes. Quoique ces cinq méthodes ne diffèrent que par la marche des raisonnements qui conduisent au théorème principal, on ne peut pourtant se passer de leur concours commun, car tel théorème qui s'offre de lui-même, quand on suit l'une des méthodes, ne pourrait être trouvé par aucune des autres qu'avec la plus grande difficulté. La seconde de ces cinq méthodes s'applique également aux figures sphériques; mais nous serons obligés de recourir aux trois dernières pour traiter le cas de l'espace d'une manière en quelque sorte analogue.

La première méthode consiste à établir d'abord deux théorèmes fondamentaux de la plus grande simplicité, et d'où découle un théorème que nous nommerons *principal*, parce qu'il sert de base à tout ce qui suit : on verra par-là qu'il existe une liaison particulière et intime entre les figures susceptibles d'un maximum ou d'un minimum, notamment qu'elles entrent comme parties constitutives de la figure à laquelle le théorème principal se rapporte, et que les fondements sur lesquels celui-ci repose peuvent également servir à en démontrer d'autres beaucoup plus compliqués, et bien plus difficiles en apparence.

DES FIGURES PLANES ET SPHÉRIQUES.

§ I. *Théorèmes fondamentaux sur les figures planes.*

1. *Lemme.* Les sommets de tous les triangles isoscèles construits sur la même base, se trouvent sur la droite qui passe par le milieu de la base et qui est perpendiculaire sur elle; de deux quelconques de ces triangles, celui qui a le plus grand périmètre a aussi la plus grande aire, et réciproquement.

---

[*] *Voyez* le *Journal* de M. Crelle, et les *Mémoires de l'Académie de Berlin*; les extraits de quelques Mémoires inédits se trouvent aussi dans les *Comptes rendus* de cette Académie.

2. *Lemme.* Les surfaces de tous les triangles construits sur la même base sont entre elles comme leurs hauteurs, et réciproquement. Lorsque les triangles sont équivalents, les sommets sont sur une droite parallèle à la base.

Premier théorème fondamental.

3. 1°. *Entre tous les triangles isopérimètres et de même base le triangle isoscèle est un maximum.*

2°. *De deux de ces triangles, celui qui aura l'angle le plus petit ou le plus grand à la base, ou bien dont l'un des côtés sera le plus petit ou le plus grand, sera le plus petit lui-même, et réciproquement.*

Démonstration. 1°. Soient le triangle isoscèle ACB et le non isoscèle ADB (*Planche I, fig.* 1), construits sur la même base AB, et soit en même temps $AC + BC = AD + BD$; puisqu'il y a toujours une partie AEB, qui est commune aux deux triangles, le théorème sera démontré quand on aura prouvé que l'on a triangle $AEC > BED$.

L'angle α est égal à l'angle β, donc on a $\beta > \gamma$ et $AE > BE$. Faisons $EF = EB$, et prenons sur la ligne EC, $EG = ED$; je dis que le point G doit nécessairement tomber entre C et E. Car supposons que G tombât en C, alors ED étant égal à EC, les deux triangles BED et FEC seraient égaux, d'où résulterait $FC = BD$; en même temps la ligne DF serait égale à BC; donc (puisque par hypothèse $AC + BC = AD + BD$) on aurait $BD + AF = FC + AF = AC$, c'est-à-dire que la somme de deux côtés d'un triangle serait égale au troisième, ce qui est impossible. Le point G peut encore moins tomber au-delà de C, par exemple en H; car on aurait alors, par les mêmes raisons, $AF + FH + HC = AC$, c'est-à-dire que la ligne brisée AFHC serait égale à la droite AC. Donc le point G doit tomber entre E et C. Cela étant, on a triangle $FEG = BED$; donc triangle $AEC > BED$; donc aussi le triangle isoscèle ACB est plus grand que le triangle non isoscèle ADB.

2°. Soient ACB, ADB (*fig.* 2) deux triangles isopérimètres quelconques de même base; désignons par γ le plus petit des quatre angles à la base, ce qui exige que $\gamma < \beta$; nous pourrons démontrer comme nous venons de le faire (1°.) que triangle $ADB < ACB$, c'est-

à-dire que le triangle qui a le plus petit angle à la base est le plus petit. — On peut prouver de même que le triangle ADB est plus petit que le triangle ACB, quand on suppose que δ est le plus grand des angles, ou que BD est le plus petit des côtés, ou enfin que AD est le plus grand des côtés. Pour cela il suffit de démontrer que l'hypothèse précédente $\gamma < \beta$ entraîne nécessairement ces trois conditions. Pour prouver que δ est le plus grand des angles, c'est-à-dire pour prouver qu'on a $\delta > \alpha$, retournons le triangle ADB de manière à lui faire prendre la position AD_1B dans laquelle les angles γ et δ tomberont en γ_1 et δ_1, on aura $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$; le sommet D_1 doit nécessairement tomber au-delà du côté AC, puisqu'on a $\beta > \gamma_1$ $(= \gamma)$, d'après cela on voit que δ_1 sera plus grand que α, donc $\delta > \alpha$. Pour prouver que BD est le *plus petit* et AD le *plus grand* des quatre côtés, j'observe que AD ne peut être ni égal à AC, ni plus petit que AC, en sorte qu'il faudra que AD soit plus grand que AC et par suite $BD < BC$. D'abord si l'on admettait que AD fût égal à AC, alors BD serait égal à BC, et le triangle ADB serait égal au triangle ACB, ce qui est impossible. En second lieu, si l'on avait $AD < AC$, il en résulterait $BD > BC$, et dans le triangle ACD l'angle ACD devrait être plus petit que l'angle ADC; en même temps dans le triangle BCD on aurait angle $BCD > BDC$, ce qui est impossible. Il s'ensuit que $AD > AC$ et $BD < BC$. On démontrerait de la même manière que l'on a $BD_1 > BC$, $AD_1 < AC$, ou bien $AD > BC$, $BD < AC$. Il est donc prouvé qu'en effet BD est le plus petit et AD le plus grand des quatre côtés. — On prouverait par une démonstration semblable que réciproquement chacune de ces trois conditions entraîne la première, savoir, $\gamma < \beta$, et par suite, triangle $ADB < ACB$, et que de même l'existence de ces quatre relations est une conséquence nécessaire de la supposition triangle $ADB < ACB$.

On voit que la seconde partie du théorème (2°.) renferme comme un cas spécial la première (1°.), qui est l'énoncé du maximum. Chacune de ces parties nous sera utile dans la suite.

4. *Entre tous les triangles de même base et de même surface, le triangle isoscèle est celui qui a le plus petit périmètre.*

Démonstration. Soit G le triangle isoscèle et U un triangle non isoscèle quelconque de même base et de même surface; désignons par G_1

un autre triangle isoscèle, construit sur la même base, et dont le périmètre soit égal à celui de U : on aura (**3**) $G_1 > U$, et (puisque $U = G$), $G_1 > G$; donc (**1**) périmètre $G_1 >$ périmètre G, ou bien périmètre U $>$ périmètre G.

5. *Entre tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum, et réciproquement : entre tous les triangles de même surface le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

1re Démonstration. Le triangle maximum correspondant au périmètre donné doit toujours être isoscèle, que l'on prenne tel ou tel de ses côtés pour base; donc ses côtés pris deux à deux doivent être égaux; donc les trois côtés sont égaux entre eux.

Cette démonstration ne laisse à la vérité rien à desirer sous le rapport de la justesse et de la rigueur; mais elle est incomplète en ce qu'elle ne montre pas clairement aux yeux pourquoi deux triangles de même périmètre étant donnés, dont l'un est équilatéral, l'autre non équilatéral, le premier est plus grand que le second. Pour remédier à cet inconvénient, *Lhuilier* a donné une démonstration par laquelle on s'approche de plus en plus du triangle équilatéral, en transformant indéfiniment le triangle non équilatéral donné en triangles isoscèles de même périmètre; mais cette démonstration n'est pas non plus absolument satisfaisante. J'ai tâché de combler cette lacune par la démonstration suivante :

2me Démonstration. Soit donné un triangle non isoscèle quelconque U; construisons sur le côté le plus grand, pris pour base, un triangle isoscèle G de même périmètre; on aura (**3**) $G > U$: représentons ce triangle G par ABC (*fig.* 3). Par hypothèse la base AB est plus grande et chacun des côtés AC et BC plus petit que le tiers du périmètre. Soit donc la partie BD de la base égale au tiers du périmètre; prenons sur le prolongement du côté adjacent BC le point E tel que le triangle DEB soit isopérimètre au triangle ACB ; on aura $DE + EC = AD + AC$ (puisque BD et BC appartiennent aux deux périmètres). BC étant plus petit que le tiers du périmètre, il s'ensuit $BD > BC$ et l'angle x plus grand que l'angle y, ensuite angle $ADC >$ ECD, d'où triangle ECD $>$ ADC (**3**, 2°.), et enfin DEB $>$ ACB, ou triangle DEB plus grand que triangle G. Soit maintenant le triangle DFB équilatéral et par suite ayant un périmètre

égal à celui de DEB (ou G et U) dont BD est le tiers; alors on a triangle DFB > DEB (**5**), donc DFB > G, et *à fortiori* DFB > U. — Cette démonstration est directe et rigoureuse en même temps.

Le théorème réciproque se démontre facilement par voie indirecte, comme le précédent, ou bien il peut être déduit de celui-ci :

Second théorème fondamental.

6. *Entre tous les triangles construits avec deux côtés donnés, celui dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires l'un à l'autre sera un maximum.*

Démonstration. Si l'on prend l'un des côtés donnés pour base, la surface du triangle augmente quand la hauteur augmente; or celle-ci est la plus grande possible, quand elle est égale à l'autre côté donné, c'est-à-dire quand ce côté est perpendiculaire à la base.

Il y a une démonstration de ce théorème plus analogue à celle qui concerne les triangles sphériques (**14**). La voici :

Soit AB (*fig.* 4) l'un des côtés donnés pris pour base fixe; les sommets de tous les triangles que l'on peut construire avec les côtés donnés, sont situés dans un cercle FCG, qui a le point A pour centre et l'autre côté AC pour rayon; tirons les droites FG, DE,... parallèlement à la base AB; elles rencontreront en général le cercle en deux points. Ces points de rencontre sont les sommets de deux triangles équivalents, construits avec les côtés donnés, par exemple des triangles ADB et AEB; l'aire de ces triangles devient d'autant plus grande que la parallèle est plus éloignée de la base, et il est clair que cette distance est la plus grande possible quand la parallèle est tangente en C; mais, dans ce cas, il n'y a qu'un seul triangle ACB : dans ce triangle, qui est un maximum, les côtés donnés AB et AC sont perpendiculaires l'un à l'autre.

7. *Entre tous les triangles dont la somme des deux côtés est donnée, celui dans lequel ces deux côtés sont égaux et perpendiculaires l'un à l'autre est un maximum.*

Démonstration. Que l'on répartisse la somme donnée, comme l'on voudra, sur les deux côtés, le triangle maximum sera toujours celui qui aura ces deux côtés perpendiculaires l'un à l'autre (**6**); il ne reste

donc qu'à démontrer que le triangle isoscèle est le plus grand de tous ces triangles rectangles. Imaginons pour cela un triangle isoscèle construit sur l'hypoténuse de l'un de ces triangles rectangles non isoscèles, et dont la somme des côtés soit la même; il sera plus grand que le triangle non isoscèle, mais plus petit que le triangle isoscèle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont égaux à ses côtés.

Remarquons encore que le produit de deux parties d'une droite donnée est le plus grand possible, quand ces parties sont égales, ou que le rectangle est le plus grand des parallélogrammes à côtés donnés, et qu'entre tous les rectangles de même périmètre le carré est un maximum.

§ II. *Théorèmes fondamentaux pour les figures sphériques.*

8. *Lemme.* Les sommets de tous les triangles sphériques de même base se trouvent sur le grand cercle, qui est perpendiculaire à la base en son milieu; de deux quelconques de ces triangles celui qui a le plus grand périmètre est le plus grand, et réciproquement.

9. *Lemme.* L'aire d'un triangle sphérique de base donnée est d'autant plus petite ou plus grande que le cercle qui passe par son sommet et par les points diamétralement opposés aux extrémités de sa base, est plus ou moins incliné sur cette base (c'est-à-dire selon que l'angle formé par ce cercle et la base est plus petit ou plus grand). Il s'ensuit que les sommets de tous les triangles de même surface se trouvent sur un même cercle, et réciproquement [*], et que tout autre triangle a une

[*] J'ai démontré ce théorème pour la première fois dans un Mémoire intitulé : *De la transformation et de la division des figures sphériques au moyen de constructions géométriques.* (*Journal* de M. Crelle, tome II, page 45, mars 1827.) Fondé sur ce théorème, le Mémoire dont je parle avait pour but de rapprocher les opérations de la géométrie sphérique de celles de la géométrie plane.

Ce théorème avait déjà été démontré, du moins en partie, d'abord par *Lexell*, et plus tard par *Legendre;* mais il n'est devenu d'une application facile, que par ce complément indispensable : *que le cercle qui contient les sommets de tous les triangles équivalents passe par les points opposés aux extrémités de la base.* Nous en rappel

aire plus petite ou plus grande que ceux-ci, selon que son sommet se trouve dans l'espace compris entre la base et le cercle, ou bien au-delà de ce cercle.

---

lerons succinctement la démonstration, parce que tous les lecteurs ne sont peut-être pas à même de recourir au Mémoire cité.

Nous supprimons les figures, auxquelles il sera facile de suppléer.

1°. Les angles à la base sont égaux dans le triangle sphérique isoscèle.

2°. Dans tout quadrilatère sphérique ABCD inscrit dans un cercle, la somme des angles opposés est la même, en sorte que l'on a

$$A + C = B + D;$$

car si l'on joint le pôle P du cercle aux sommets du quadrilatère au moyen des rayons sphériques (ou arcs de grand cercle) PA, PB, PC, PD, on obtient quatre triangles isoscèles APB, BPC, etc., dont chacun a les angles à la base égaux entre eux, d'où résulte

$$A + C = B + D.$$

3°. Tirez la diagonale AC dans ce même quadrilatère inscrit, désignez par α et α_1 les deux parties dans lesquelles elle divise l'angle A, et de même par γ et γ_1 les parties de l'angle C, de manière que les angles α et γ appartiennent au triangle ABC, et α_1, γ_1 au triangle ADC, vous aurez

$$\alpha + \alpha_1 + \gamma + \gamma_1 = B + D \ (2^\circ),$$
$$\alpha + \gamma) - B = D - (\alpha_1 + \gamma_1)$$

Fixons les trois sommets A, D, C, tandis que B décrit l'arc ABC; alors les angles B, α, γ changeront de grandeur, mais la différence $\alpha + \gamma - B$ est constante, puisqu'elle reste toujours égale à la différence invariable $D - (\alpha_1 + \gamma_1)$; donc *la base* AC *d'un triangle sphérique* ABC *étant connue de grandeur et de position, et la différence entre la somme des angles adjacents à la base* ($\alpha + \beta$) *et l'angle au sommet* (B) *étant donnée, le lieu géométrique du sommet est un certain cercle* P *qui passe toujours par les extrémités* A *et* C *de la base.*

4°. Désignons en outre par A_1 et C_1 les points opposés aux points fixes A et C; ils se trouvent sur les côtés AB et BC prolongés au-delà de B, de manière qu'on a deux triangles opposés au sommet, ABC et A_1BC_1, qui changent simultanément; leurs angles au sommet commun B étant opposés, sont égaux, et les angles α, γ et A_1, C_1, adjacents aux bases fixes AC et A_1C_1, sont suppléments les uns des autres, de manière qu'on a

$$\alpha - A_1 = \pi, \quad \gamma + C_1 = \pi;$$

10. *Lemme*. Quand des cercles se touchent sur la surface de la sphère, leur point de contact se trouve sur le même grand cercle avec leurs pôles, de manière que le grand cercle qui passe par deux de ces points, passe nécessairement par le troisième.

Premier théorème fondamental.

11. I. *Entre tous les triangles sphériques de même base et de même périmètre, le triangle isoscèle est un maximum.*

II. *Entre deux de ces triangles, celui qui a l'angle le plus petit ou le plus grand à la base, ou dont l'un des côtés est le plus petit ou le plus grand, est le plus petit lui-même, et réciproquement.*

La démonstration de ce théorème ressemble parfaitement à celle du théorème analogue (**3**); on n'a qu'à remarquer que les triangles sphériques correspondants aux triangles plans BED et FEG (*fig.* 1) ne sont pas égaux, mais symétriques; ce qui ne nuit en rien au raisonnement (deux triangles symétriques peuvent toujours d'ailleurs être divisés en parties égales). Cette remarque servira de même pour les cas suivants, dans lesquels une différence pareille se fait remarquer.

12. *Entre tous les triangles sphériques équivalents et de même base, le triangle isoscèle a le plus petit périmètre.*

---

puisque (3°) $\alpha + \gamma - B$ est constant et égal à $D - \alpha_1 + \gamma_1$, que nous appellerons K, on obtiendra donc

$$A_1 + B - C_1 = 2\pi - K;$$

c'est-à-dire que si la différence $\alpha + \gamma - B$ est constante dans le premier triangle ABC, la somme des angles et par-là même l'aire de l'autre triangle A_1BC_1 sont aussi constantes, et réciproquement. Mais, cela étant, le lieu géométrique du sommet B est un cercle qui passe toujours par les pointes fixes A et C; la proposition est donc démontrée.

Pour le cas spécial où la base fixe AC devient égale au diamètre sphérique du cercle P, K est égale à zéro (puisque $D = \alpha_1 + \gamma_1$, $B = \alpha + \gamma$, et réciproquement. Dans ce cas on aura

$$A_1 + B + C_1 = 2\pi;$$

donc l'aire du triangle A_1BC_1 est égale au quart de la surface de la sphère.

Une autre démonstration, plus simple encore, du théorème général, résulte de considérations stéréométriques.

La démonstration de ce théorème est conforme à celle du théorème analogue donné ci-dessus (**4**).

13. *Entre tous les triangles sphériques de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum; et entre tous les triangles sphériques équivalents, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

Les démonstrations données ci-dessus (**5**) sont pareillement applicables à ce théorème.

Second théorème fondamental.

14. *Le triangle maximum entre ceux que l'on peut construire avec deux côtés donnés, est celui dans lequel l'angle des deux côtés est égal à la somme des angles à la base, ou dans lequel la base est un diamètre du cercle circonscrit.*

Démonstration. Prenons l'un des côtés donnés, par exemple AC (*fig.* 5) pour base fixe; alors le lieu géométrique des sommets des triangles sera un cercle DBE, dont A est le pôle et dont le rayon sphérique est égal à l'autre côté donné AB. Soient A_1 et C_1 les pôles respectivement opposés à A et C. Chacun des cercles qui passent par A_1 et C_1 est le lieu géométrique des sommets d'un système de triangles équivalents, construits sur la base AC (**9**); s'il rencontre le cercle fixe A en deux points D, E, ces deux points seront les sommets de deux triangles ADC et AEC, qui sont équivalents et ont pour côtés les côtés donnés. Remarquons en passant qu'il s'ensuit : *qu'à chacun des triangles qui peuvent être construits avec les côtés donnés correspond en général un second triangle équivalent.* L'aire augmente à mesure que le cercle, lieu géométrique, est moins incliné sur le plan de la base AC; or ce cercle doit d'ailleurs rencontrer le cercle fixe A; il fera donc avec la base le plus grand angle possible quand il ne touchera le cercle fixe qu'en un seul point B; donc le triangle ABC est un maximum entre tous les triangles qui ont les mêmes côtés donnés. Le pôle F du cercle tangent se trouve sur le prolongement du côté AB (**10**). Puisque $FA_1 = FB = FC_1$, on aura, dans le triangle A_1BC_1, $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; mais on a $\alpha + \alpha_1 = \gamma + \gamma_1 = \pi$ (parce que α_1, γ_1 sont égaux aux angles supplémentaires de α et γ) et $\beta_1 = \beta$; donc

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

c'est-à-dire que dans le triangle maximum ABC, l'angle α qui est formé par les deux côtés donnés AB et AC est égal à la somme des deux autres angles $\beta + \gamma$, ce qui était d'abord à démontrer. Ensuite divisez l'angle α au moyen d'un grand cercle AG, de manière qu'on ait BAG $= \beta$, CAG $= \gamma$; alors on a AG $=$ BG $=$ CG, donc G est le pôle et BC le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, ce qui démontre la seconde partie du théorème.

15. *La somme des deux côtés d'un triangle sphérique étant donnée, le triangle maximum est celui qui a ses côtés égaux et formant entre eux un angle égal à la somme des deux autres angles.*

La démonstration de ce théorème est parfaitement semblable à celle du théorème analogue sur les triangles plans **7**. On pourrait de même ajouter des corollaires analogues sur les quadrilatères sphériques.

§ III. *Théorèmes plus généraux concernant les figures planes et sphériques.*

Remarque préliminaire générale.

16. Nous venons de montrer, en ce qui concerne les triangles plans et sphériques, combien il est facile d'énoncer les théorèmes d'une manière analogue et de mettre les démonstrations en parfait accord: cela sera tout aussi simple pour les théorèmes et les démonstrations concernant les autres figures. Seulement, pour plus de brièveté, nous énoncerons dans la suite en même temps, et les théorèmes sur les figures planes, et ceux sur les figures sphériques, ou du moins on y suppléera par la pensée toutes les fois que les expressions ne conviendront qu'aux figures planes. J'ai même tâché d'arranger les démonstrations de manière à ce qu'elles puissent servir indistinctement, et presque sans changer d'expressions, pour les figures planes et sphériques; mais partout où il y avait une différence essentielle, je n'ai pas manqué de l'indiquer, et de la discuter même. Pour mieux saisir l'origine générale de ces différences, remarquons, dès à présent, quelques-unes des propriétés des figures sphériques et une relation particulière qui existe entre elles.

I. Le périmètre d'un polygone sphérique convexe est, en général, plus petit que le grand cercle qui est sa limite; de même (la sphère étant donnée) l'aire ou la somme des angles de ce polygone ne peut pas devenir aussi grande que l'on voudra; mais elle a la demi-surface de la sphère pour limite. Or si l'on veut prendre indistinctement pour l'aire du polygone l'une ou l'autre des parties dans lesquelles la surface de la sphère est divisée par sa circonférence, on aura la surface entière de la sphère pour limite de surface. Mais dans le cas où l'on prendrait l'aire de la plus grande partie, le polygone ne serait plus convexe, mais concave; c'est pourquoi l'on ne s'occupe, en général, que de l'aire de la plus petite partie. Cependant ces deux parties sont liées entre elles de manière que, l'une d'elles étant donnée, l'autre est connue, et que, l'une devenant un maximum sous certaines conditions, l'autre sera en même temps un minimum. Tout ce que nous venons de dire sur les polygones est pareillement vrai pour les courbes convexes et fermées.

II. Les figures polaires fournissent des réciproques à tous ces théorèmes : pour chaque théorème qui s'applique, sous certaines conditions, aux côtés et aux angles, au périmètre et à l'aire, etc., d'un polygone de n côtés, il y a toujours pour le polygone polaire un certain théorème correspondant, qui dépend du premier et qui s'obtient en substituant, tant dans les données de la question que dans les propriétés dérivées, un côté à un angle, le périmètre contre l'aire, le maximum au minimum, etc. [*]. Mais nous ne ferons dans la suite aucun usage de cette loi de réciprocité, parce qu'elle ne s'applique pas également aux figures planes. Nous n'indiquerons que la propriété suivante qui en découle.

---

[*] C'est ainsi que l'on peut déduire immédiatement du théorème (**11**) les théorèmes suivants :

I. *Entre tous les triangles équivalents qui ont le même angle au sommet, celui qui a des angles égaux à la base possède un périmètre minimum.*

II. *De deux de ces triangles, celui qui a le côté le plus grand ou le plus petit, ou dont l'un des angles à la base est le plus grand ou le plus petit, aura de même un plus grand périmètre, et réciproquement.*

Il y a une certaine relation constante entre le périmètre de l'une et l'aire de l'autre de deux figures polaires sphériques, laquelle relation sert à trouver une quelconque de ces deux quantités, quand l'autre est donnée. Elle consiste en ce que, si l'on prend la quatrième partie d'un grand cercle (le quadrant pour unité de longueur et la huitième partie de la surface de la sphère (l'octant) pour unité de surface, que l'on désigne ensuite par u le périmètre de l'une de ces figures et par f la surface de l'autre, exprimées au moyen de ces unités; alors on aura toujours

$$u + f = 4,$$

c'est-à-dire que *pour deux figures sphériques polaires la somme du périmètre* (u) *de l'une d'elles et de l'aire* (f) *de l'autre est égale à quatre.*

Les corollaires suivants découlent de cette loi :

Quand l'une des deux quantités u et f devient un maximum ou un minimum, l'autre devient en même temps un minimum ou un maximum.

Quand la rectification ou la quadrature d'une courbe sphérique peut être exécutée, alors la courbe polaire est respectivement carrable ou rectifiable, et dans le cas contraire elle ne l'est pas.

En rectifiant ou en carrant l'une de ces courbes, on obtient simultanément l'aire ou le périmètre de l'autre, etc.

Théorème principal.

17. *Entre toutes les figures isopérimètres planes (ou sphériques), le cercle est un maximum;* et réciproquement *entre toutes les figures planes équivalentes, le cercle a le plus petit périmètre.*

Démonstration. Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un des points de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir

différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il y ait entre elles *une* figure maximum ou *plusieurs* maxima de différentes formes, c'est-à-dire plusieurs figures de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures. Remarquons encore *qu'une figure dont l'aire peut être agrandie sans changer de périmètre, n'est pas un des maxima.* Il s'ensuit que chaque figure maximum est convexe, et qu'elle ne peut pas avoir de lignes droites dans son périmètre, ou du moins qu'il n'y a pas deux lignes droites consécutives, car elle pourrait encore devenir plus grande dans chacun de ces deux cas.

Soit EFGH (*fig.* 6) une des figures maxima. A chaque point A du périmètre correspond un second point B, placé de manière que ces deux points divisent le périmètre en deux parties égales, de sorte qu'on a, quant à la longueur, ligne AEFB = AHGB. Supposons que A et B aient cette propriété, alors la droite AB divise de même l'aire de la figure en deux parties égales, car si l'une d'elles, par exemple AHGBA, était plus grande que l'autre AEFBA, on pourrait transformer la seconde en la rendant égale à la première, puisqu'elles sont isopérimètres et qu'elles ont la base AB en commun; l'aire de la figure entière se serait ainsi accrue sans changer de périmètre, ce qui serait contraire à l'hypothèse; donc les deux parties doivent être équivalentes. Si elles étaient de différentes formes, on pourrait changer l'une d'elles, par exemple AEFBA, de manière qu'elle devienne symétriquement égale à l'autre AGHBA, la ligne AB étant l'axe de symétrie; et la figure nouvelle, composée de ces deux parties, serait équivalente de périmètre et d'aire à la figure primitive; elle serait donc aussi une des figures maxima. Admettons donc que AEFBA soit la partie transformée devenue symétrique à AGHBA; il s'ensuit que le prolongement de la perpendiculaire DI, abaissée d'un point quelconque D du demi-périmètre AHGB sur l'axe AB, rencontre l'autre moitié AEFB en un point C équidistant de l'axe, de manière qu'on a DI = CI, et que les triangles ADB et ACB sont égaux ou symétriques. Si les angles homologues D et C dans ces deux triangles n'étaient pas droits, on pourrait agrandir simultanément l'aire de ces triangles sans rien changer à la longueur de leurs côtés AD et BD, AC et BC (6), ni à la grandeur des segments de la figure, AHD, DGB, BFC, CEA; la base commune AB changerait

seule; mais par-là l'aire de la figure entière deviendrait plus grande (puisque le quadrilatère ADBC en fait partie), sans que le périmètre changeât de grandeur, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les angles D et C sont des angles droits. Et comme en laissant les points A et B fixes, D peut représenter un point quelconque du demi-périmètre AHGB, il s'ensuit que la figure en question est un cercle. Il est vrai que la moitié AHGB de ce cercle appartient seule à la figure primitive, et que l'autre moitié AEFBA de celle-ci pouvait être de forme différente; mais puisque, comme nous venons de le démontrer, la moitié non changée de la figure est toujours un demi-cercle AHGBA, puisqu'en outre on peut choisir arbitrairement et les points de division A et B, et la moitié qui doit rester invariable, la figure entière ne peut être qu'un cercle. Il n'y a donc pas *plusieurs* figures de différentes formes ayant la propriété d'unir la plus grande aire possible à un périmètre donné; il n'y en a qu'une *seule*, le cercle.

Remarques I. Le théorème réciproque se déduit indirectement de celui-ci. Il en est de même pour la plupart des théorèmes réciproques dont nous aurons à nous occuper dans la suite; c'est pourquoi leurs démonstrations seront toujours sous-entendues.

II. Rappelons encore ici, en ce qui concerne les figures sphériques, que toutes les fois que l'on aura recours à un théorème, fondamental ou autre, concernant les figures planes, pour en déduire une démonstration, on devra avoir égard en même temps au théorème analogue sur les figures sphériques. Ayant, par exemple, démontré ci-dessus que dans les triangles ADB et ACB les angles D et C sont droits, on en conclura pour les figures sphériques, que chacun de ces angles est égal à la somme des angles à la base (**14**).

18. Le théorème que nous venons de démontrer (**17**) mérite en effet le nom de théorème *principal*, car il contient, il résume pour ainsi dire les principes les plus essentiels à la solution de la plupart des questions concernant les maxima et les minima d'aire, de périmètre, etc., dans les figures planes et sphériques. Les solutions qu'on en tire pour ces questions sont même aussi naturelles, aussi simples et aussi immédiates que possible, car elles dérivent graduellement du théorème principal, dont elles font pour ainsi dire partie, ou plutôt elles se présentent comme des théorèmes sur les différentes par-

ties de la figure qui en est l'objet. De même que le cercle a la double propriété d'avoir entre toutes les figures isopérimètres ou équivalentes respectivement la plus grande aire ou le plus petit périmètre, de même ses différentes parties sont douées de propriétés semblables, desquelles ces théorèmes découlent. Ainsi ces théorèmes sont liés avec le théorème principal, de telle manière qu'ils en dérivent comme des corollaires, ou du moins que leurs démonstrations en résultent pour la plupart immédiatement. Et pourtant quelques-uns d'entre eux offriraient de grandes difficultés si l'on essayait de les démontrer isolément et indépendamment du théorème principal; c'est là, je crois la raison pour laquelle ils n'ont encore été énoncés ni démontrés par personne, que je sache.

Il serait utile d'adopter des dénominations fixes pour les différentes parties dans lesquelles le cercle lui-même et l'espace qui l'environne peuvent être divisés au moyen de cordes, de sécantes et de tangentes, et de poser certains lemmes préliminaires; cela nous aiderait à énoncer les théorèmes suivants avec plus de facilité, et à les manier avec plus de sûreté. Mais comme la discussion complète de ces matières nous mènerait trop loin, nous n'en présenterons ici qu'une légère esquisse.

On a donné les noms de segment et de secteur à certaines parties de l'aire du cercle; il faudrait de même consacrer des dénominations spéciales aux parties qui sont limitées :

a) par plusieurs cordes et les arcs intermédiaires;

b) par plusieurs angles circonscrits et les arcs intermédiaires;

c) par des cordes et des angles circonscrits et les arcs intermédiaires, etc.

J'ai choisi respectivement les expressions suivantes :

a. *partie de cercle entre* n *cordes;*

b. *partie de cercle entre* m *angles circonscrits;*

c. *partie de cercle entre* n *cordes et* m *angles circonscrits, etc.*

Il resterait encore à rechercher sous quelles conditions chacune de ces parties de cercle sera déterminée, ou bien, si l'on suppose certains éléments donnés, quelles seront les limites entre lesquelles les autres éléments seront renfermés, etc. On peut suivre dans ces recherches une marche toute géométrique, en faisant varier le cercle ou ses éléments d'une

manière continue; on parviendra ainsi à se convaincre par l'intuition immédiate de l'existence de certaines relations, et des propriétés qui sont contenues dans les théorèmes auxiliaires dont nous venons de parler. Nous les pourrons donc supposer connus dans la suite, comme on le fait habituellement pour quelques-uns d'entre eux; par exemple, on suppose qu'il y a toujours un cercle auquel un polygone de côtés donnés peut être inscrit.

Pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire, nous allons traiter de la manière indiquée la partie de cercle la plus simple, le segment.

1°. L'aire du cercle est divisée en deux segments $a\alpha$ et $a\beta$ (*fig.* 7) par une corde quelconque a; le plus petit de ces segments peut être nommé segment à *angle aigu*, et l'autre segment à *angle obtus*, lesquelles dénominations sont empruntées aux angles que la corde forme avec l'arc. *Segment rectangulaire* est donc synonyme de *demi-cercle*.

2°. La corde a et le cercle K étant donnés, les aires et les arcs (α, β) des segments restent constants, pendant que la corde change arbitrairement de position.

3°. La corde a étant seule donnée, lorsque le cercle grandit ou diminue, l'arc le plus grand β varie dans le même sens, tandis que le petit arc α varie en sens contraire, et les aires des segments augmentent et diminuent comme les arcs correspondants. L'accroissement et la diminution du grand arc β surpassent la diminution et l'accroissement du petit arc α; la même relation existe entre les segments correspondants. — Le cercle obtient son minimum lorsque son diamètre devient égal à a; alors on a $\alpha = \beta$ et $a\alpha = a\beta$; quand au contraire le cercle devient infiniment grand, l'arc α atteint sa limite, la corde a; de même le segment $a\alpha$ atteint sa limite, zéro, tandis que β et $a\beta$ deviennent infiniment grands. Donc, pendant que le cercle obtient toutes les valeurs possibles, les arcs α et β parcourent ensemble toutes les valeurs entre a et ∞, et les aires des segments $a\alpha$ et $a\beta$ prennent toutes les grandeurs entre 0 et ∞.

On remarque encore :

4°. Qu'étant données deux des quatre quantités suivantes : 1) le cercle K, 2) la corde a, 3) l'arc α ou β, 4) l'aire du segment

$a\alpha$ ou $a\beta$, les deux autres sont absolument déterminées, sauf le cas où l'arc et l'aire seraient donnés, car alors deux segments seraient possibles en général, savoir, le segment à angle aigu et celui à angle obtus, comme on verra dans la suite (**33**). On suppose toutefois, que les quantités données ne s'excluent pas mutuellement, en ayant égard aux limites indiquées ci-dessus (3°).

Conséquences du théorème principal.

19. *Si le périmètre d'une figure se compose d'une droite de longueur arbitraire* G *et d'une ligne* L *de forme arbitraire, et si en même temps la longueur de la ligne* L *ou l'aire de la figure est donnée, celle-ci est un maximum, ou la ligne* L *est un minimum, quand cette figure est un demi-cercle.*

Démonstration. Toute figure comprise dans ce théorème peut être considérée comme la moitié d'une figure symétrique, dont la droite G est l'axe de symétrie, et dont le périmètre, égal à 2L, est donné. Mais l'aire de la moitié est nécessairement un maximum dès que la figure entière en est un. Donc notre théorème est une conséquence du théorème du n° **17** [*].

Il s'ensuit en particulier : *qu'entre tous les segments de cercle à arcs égaux ou à aires égales, c'est le demi-cercle qui a l'aire la plus grande ou l'arc le plus petit.*

20. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'une droite donnée* a *et d'une ligne prise à volonté* L, *le segment de cercle a la plus grande aire pour des longueurs égales de la ligne* L, *et la plus petite ligne* L *quand les aires sont égales.*

---

[*] On pourrait démontrer séparément ce théorème, et en déduire inversement le théorème principal; la démonstration sera même très courte, si l'on renonce en partie à la rigueur et à la généralité que nous avons tâché de maintenir. On n'a qu'à supposer qu'une figure maximum existe; dès lors il ne sera pas difficile de démontrer qu'elle ne peut être que le demi-cercle, parce qu'on pourra faire grandir chaque autre figure, telle que AEFBA (fig. 6) (dans laquelle AB représente la droite G qui est à volonté, et AEFB représente la ligne donnée L), toutes les fois que l'angle ACB ne sera pas droit pour chacun des points C de la ligne AEFB.

Démonstration. Supposons la ligne L de forme quelconque, et qu'elle compose avec la droite a le périmètre de la figure aL, on peut toujours construire sur a un segment de cercle dont l'arc α soit égal à L (**18**), α et L étant situés du même côté de a. Complétons le cercle, et désignons l'autre arc par β; alors le cercle de périmètre $\alpha + \beta$ est plus grand que la figure limitée par L $+ \beta$ (**17**); ainsi $a\alpha + a\beta > a\mathrm{L} + a\beta$: donc $a\alpha > a\mathrm{L}$.

Remarque. On déduira de ce théorème une règle générale, qui nous sera bien utile dans la suite. La voici :

Dans toute figure dont l'aire doit être un maximum sous des conditions quelconques, chaque partie du périmètre qui est libre d'avoir une forme quelconque entre deux points donnés, doit être un arc de cercle.

21. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé de deux droites données* a, b *et d'une ou de deux lignes à volonté* l *et* l_1, *c'est la partie de cercle comprise entre les droites* a *et* b, *prises comme cordes* (**18**), *qui a l'aire maxima quand la somme des lignes* $\mathrm{l} + \mathrm{l}_1 = \mathrm{l}$ *est donnée, et la somme minima* L *ou* $\mathrm{l} + \mathrm{l}_1$, *quand l'aire est donnée.*

Démonstration. Soit K le segment de cercle, et F une quelconque des autres figures dont nous venons de parler. Ajoutons à K les deux segments de cercle $a\alpha$ et $b\beta$, de manière à compléter le cercle K_1; ajoutons les mêmes segments à la figure F, de manière à obtenir une figure F_1; alors K_1 et F_1 seront de même périmètre, $\mathrm{L} + \alpha + \beta$; mais l'aire de K_1 est plus grande que celle de F_1, donc aussi $\mathrm{K} > \mathrm{F}$.

Remarque. On voit qu'il est indifférent que les droites a et b se succèdent immédiatement dans le périmètre, qu'elles aient ou qu'elles n'aient pas d'extrémité commune, qu'il y ait une seule ligne L ou deux lignes l et l_1.

22. *Si au lieu des droites* a *et* b, *leur somme* $\mathrm{s} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$ *est donnée, les autres conditions restant les mêmes, l'aire de la partie de cercle est un maximum maximorum, et la somme* $\mathrm{L} = \mathrm{l} + \mathrm{l}_1$ *est un minimum minimorum, lorsque les deux droites sont égales, c'est-à-dire lorsqu'on a* $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \frac{1}{2}\mathrm{s}$.

Démonstration. Prenons a et b de longueurs différentes, et construisons la partie de cercle renfermée par elles de manière qu'elles aient

un point C commun (on aura alors $l_1 = 0$ et $l = L$); joignons les autres extrémités A et B par la droite AB, la figure en question sera composée du triangle ACB et du segment ALB; mais ce triangle s'accroîtra quand les côtés a et b deviennent égaux; la figure entière croît par là, et plus encore quand elle se convertit en une partie de cercle entre les côtés égaux, pris comme cordes, C. Q. F. D.

23. *La partie de cercle entre* n *cordes* a, b, c,.... *est un maximum entre toutes les figures dont le périmètre est composé de ces mêmes côtés droits et d'autres lignes à volonté* l, l_1, l_2,.... *dont le nombre est arbitraire depuis* 1 *jusqu'à* n *et dont la somme* $= L$; *et les aires de toutes ces figures étant égales, son périmètre est un minimum.*

Ce théorème se démontre comme celui du n° **21**.

24. *Si dans le théorème précédent les cordes* a, b, c,.... *ne sont pas données isolément, mais si leur somme* s *est donnée, l'aire de la partie de cercle est un maximum entre les maxima, et la somme* L *des autres parties du périmètre* l, l_1, l_2,.... *est un minimum entre les minima, lorsque ces droites sont égales entre elles.* — Ce théorème est encore applicable au cas où l'on se donnerait quelques-unes des droites et seulement la somme des autres, et au cas où les sommes de différents groupes de droites seraient données; ce seraient alors les droites appartenant au même groupe qui devraient être égales entre elles.

Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème du n° **22**.

25. Pour le cas spécial où la somme $L = l + l_1 + \ldots$ est égale à zéro, on a les théorèmes suivants qui sont connus :

I. *Un polygone de côtés* a, b, c,..., *donnés, est un maximum lorsqu'il est une partie de cercle entre les cordes* a, b, c,...., *c'est-à-dire lorsqu'il est inscriptible dans un cercle.*

II. *Un polygone de* n *côtés et de périmètre donné est un maximum, lorsqu'il a les côtés égaux et qu'il est inscriptible à un cercle, c'est-à-dire lorsqu'il est régulier;* et réciproquement *entre les périmètres de tous les polygones équivalents de* n *côtés, celui du polygone régulier est un minimum.*

26. Quand on cherchera donc quel polygone a l'aire maxima pour un périmètre constant, ou le périmètre minimum pour une aire

constante, le nombre de côtés étant variable, on n'aura qu'à s'occuper des polygones réguliers, et l'on trouvera la loi suivante :

Les aires des polygones réguliers isopérimètres forment une série croissante, qui commence par le triangle et se termine par le cercle ; et les périmètres des polygones équivalents forment une série décroissante, à partir du triangle jusqu'au cercle.

Démonstration. Deux polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés différents étant donnés, par exemple un pentagone ABCDE et un quadrilatère *abcd*, on peut considérer ce dernier comme un pentagone dont l'un des côtés serait nul, ou bien, en prenant arbitrairement un point *e* sur un des côtés de ce quadrilatère, par exemple, sur *ad*, le considérer comme un pentagone *abcde*, dont l'un des angles *e* serait égal à deux angles droits: le quadrilatère régulier peut donc être regardé comme un pentagone irrégulier : donc son aire est plus petite que celle du pentagone régulier ABCDE.

Remarque I. On trouverait des lois semblables et pour le théorème du n° **24** et pour un grand nombre des théorèmes suivants, en supposant toujours la somme des côtés rectilignes *a*, *b*, *c*,..., donnée, et en variant leur nombre ; mais il suffit d'avoir appelé sur ce point l'attention du lecteur.

II. La démonstration qu'on vient de lire est remarquable par sa simplicité, et il est bien étonnant qu'on ne l'ait pas encore donnée. Toutes les démonstrations que je connais de ce théorème pour les figures planes sont plus ou moins prolixes et embarrassées ; la plus élégante de toutes est celle qu'en donne *Lhuilier ;* mais il paraît qu'il n'en existe encore aucune pour les figures sphériques. Aussi ne suis-je parvenu à trouver la démonstration donnée ci-dessus, qui s'applique également aux deux espèces de figures, qu'après en avoir fait plusieurs pour les figures planes, et tenté inutilement de les appliquer d'une manière analogue aux figures sphériques.

27. I. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'un nombre* n *de côtés rectilignes* a, b, c,..., *donnés, d'une droite* G *de longueur arbitraire, et d'un nombre (qui peut varier depuis* 1 *jusqu'à* n *inclusivement) de lignes,* l, l_1, l_2,..., *de forme quelconque, la partie de cercle entre* G *pris pour diamètre et les cordes* a, b, c,...,

est un maximum tant que la somme $L = l + l_1 + \ldots$ *reste la même, et son périmètre est un minimum entre ceux de toutes les figures qui lui sont équivalentes.*

II. *Un théorème analogue s'applique au cas où la somme des* n *droites* a, b, c, ..., *serait donnée; il faut alors qu'elles soient égales entre elles.*

III. *Si dans les deux cas* (I *et* II) *les lignes* $l, l_1 \ldots$, *sont toutes nulles, la figure se change en un polygone de* $n + 1$ *côtés, inscrit à un cercle qui aura le côté arbitraire* G *pour diamètre.*

La démonstration est fondée sur les théorèmes précédents et ressemble à celle du théorème (**19**).

28. Entre toutes les figures dont le périmètre est composé des deux côtés AB, AC d'un angle droit A, et d'une ligne arbitraire L, le quadrant de cercle a la double propriété d'avoir une aire maxima pour la même longueur de la ligne L, et la ligne L minima pour l une même aire donnée. — Ce théorème a pareillement lieu quand la ligne L est composée de droites données a, b, c, ..., et de lignes arbitraires l, l_1, l_2, ...; c'est alors la partie de cercle entre les cordes a, b, ..., et les rayons AB, AC qui est un maximum; de même quand la somme et le nombre des droites a, b, c, ..., sont donnés.

Dans tous ces cas on peut considérer la figure en question comme moitié d'une autre figure, qui aurait la droite AB ou AC pour axe de symétrie; ces théorèmes découlent alors immédiatement des théorèmes précédents (**19** et **27**).

29. I. Si la ligne L doit partir d'un certain point B du côté donné AB, le maximum ou le minimum (**28**) a lieu lorsque la figure est la moitié d'une partie de cercle dont l'autre côté AC est l'axe de symétrie, de manière que le centre du cercle est sur ce côté auquel par suite L est perpendiculaire.

II. Le point B étant donné sur le côté BD, si l'angle BDC, au lieu d'être droit, est aigu, les théorèmes restent les mêmes, car la figure s'est seulement accrue d'un triangle constant BAD, que l'on obtient en abaissant du point B une perpendiculaire BA au côté CD; le centre du cercle se trouve encore sur le côté CD.

30. *Entre toutes les figures limitées par les côtés* AB *et* AC *d'un*

angle donné BAC, *qui peuvent être de longueur quelconque, et par une ligne* L *de longueur donnée mais de forme arbitraire, le secteur de cercle est un maximum.*

Démonstration. Qu'on construise la même figure symétriquement sur un des côtés, par exemple sur AC, de manière que la figure ABLC soit d'un côté et que la figure AB_1L_1C soit de l'autre côté de AC; alors il faut, pour que l'aire soit la plus grande possible, que la ligne $BLCL_1B_1$, de même que sa moitié L, soient des arcs d'un cercle dont le centre se trouve sur le côté AC; mais par les mêmes raisons ce même centre de L doit être sur le côté AB; il est donc au point d'intersection A des côtés AB, AC.

Une autre démonstration découle de (**29**, I).

31. I. *Ce théorème* (**30**) *a pareillement lieu pour le cas où la ligne* L *est composée de droites données* a, b, c,..., *et de lignes arbitraires* l, l_1, l_2,...; *la partie du secteur de cercle entre les rayons* AB, AC *et les cordes* a, b, c,..., *est alors un maximum.*

II. *Faisant décroître les lignes* l, l_1, l_2,... *jusqu'à ce qu'elles deviennent nulles, on obtient un théorème concernant le polygone dont un angle* BAC *est donné avec tous les côtés* A, B, C,..., *non adjacents à cet angle* [*].

Ces théorèmes et le théorème (**30**), se transforment en plusieurs autres, donnés ci-dessus, quand on fait successivement l'angle $A = \frac{1}{2}\pi$, $= \pi$, $= 2\pi$.

32. *Entre tous les secteurs de cercle isopérimètres, celui dont l'arc est égal au diamètre est un maximum.*

Démonstration. Toute aire de secteur est égale à la moitié d'un triangle rectangle, dont les côtés qui comprennent l'angle droit sont respectivement égaux à l'arc et au diamètre; mais ce triangle est un maximum quand il est isoscèle (**7**) : donc, etc.

Remarque. Ce théorème ne s'applique pas complétement aux secteurs

[*] Il s'ensuit en particulier : *qu'entre tous les triangles dont l'angle au sommet* A *et la base* a *sont donnés, c'est le triangle isoscèle qui est un maximum; et qu'entre tous les triangles équivalents, qui ont le même angle* A *au sommet, c'est le triangle isoscèle qui a la plus petite base* a.

de cercle sphériques, car ce n'est pas au diamètre sphérique mais au diamètre rectiligne véritable que l'arc doit alors être égal. Aussi devient-il difficile de le démontrer géométriquement, tandis qu'on y parvient sans peine au moyen du calcul.

Les deux théorèmes se correspondent du reste de la manière suivante :

I. L'angle au centre appartenant au secteur maximum reste le même, tant sur la sphère que dans le plan, quelle que soit du reste la longueur du périmètre; il est toujours égal à $\frac{4}{\pi}\,90^\circ$.

II. L'aire du secteur plan est égale au carré du rayon, l'aire du secteur sphérique est égale au carré de la corde rectiligne qui correspond à son rayon sphérique.

Pour le cas spécial où le périmètre du secteur sphérique est égal au périmètre d'une moitié de grand cercle, ce secteur correspond à un grand cercle, et son aire est égale à $2r^2$, ou à $\frac{1^{\text{ième}}}{2\pi}$ de la surface de la sphère dont r est le rayon.

33. *De deux segments de cercle à angles aigus et à arcs de même longueur, celui auquel appartient l'angle le plus grand ou la plus petite corde, est le plus grand; et de deux segments à angles obtus et à arcs de même longueur, le plus grand est celui dont l'angle est plus petit ou dont la corde est plus grande.*

Démonstration. Soient ALB et $A_1L_1B_1$ deux segments à angles aigus; soit en outre arc L = arc L_1 et corde AB < corde A_1B_1; de C, centre de L, menons les rayons CA et CB, et prenons sur leurs prolongements deux points de manière que la droite qui les unit soit parallèle à AB et égale à A_1B_1 (*fig.* 8); construisons enfin le segment $A_1L_1B_1$ sur cette corde qui sera située au-delà de AB; on sait (**30**) que le secteur CALBC est plus grand que $CA_1L_1B_1C$; donc, en retranchant de part et d'autre le triangle ACB, on a ALB > $AA_1L_1B_1BA$; donc, *à fortiori*, segment ALB > segment $A_1L_1B_1$.

La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue.

Remarques. I. Entre les segments à angles aigus et ceux à angles obtus se trouve placé le segment rectangulaire ou le demi-cercle

qui est le maximum des segments à arcs égaux (**19**); les segments des deux genres diminuent à mesure qu'ils s'en éloignent, et puisqu'ils décroissent d'une manière continue, il faut que pour chaque segment d'une espèce il y en ait un de l'autre espèce qui lui soit équivalent; il y a donc toujours deux et seulement deux différents segments d'arc et d'aire donnés; il faut toutefois pour cela que l'aire donnée soit plus petite que celle du demi-cercle dont l'arc a la longueur donnée. Cela confirme encore ce que nous avons avancé ci-dessus (**18, 4**).

II. Il y a des théorèmes analogues concernant d'autres figures construites sur deux bases inégales AB et A_1B_1, et dont le reste du périmètre L et L_1 est composé de droites données a, b, c,... communes aux deux figures, et d'autres parties arbitraires l, l_1, l_2,..., de même somme de part et d'autre, en sorte qu'on ait $L = L_1$; les démonstrations découlent du n° **31**.

34. *Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés des côtés d'un angle* A *donné, dont l'un* AB *est déterminé, tandis que l'autre* AC *est arbitraire, et d'une ligne quelconque* L *menée de* B *au côté* AC, *mais ne le dépassant pas, la partie de cercle convexe qui est comprise entre la sécante* AB *et la tangente* AC *est un maximum tant que le périmètre ne varie pas, c'est-à-dire tant que la somme* L + AC *reste la même* (*et réciproquement*).

Démonstration. Soit BLC (*fig.* 9) un arc de cercle qui touche AC au point C; soit en même temps L + AC la longueur voulue; ABLCA sera la partie de cercle en question. Nous avons donc à démontrer qu'il n'y a pas d'autre ligne L_1, menée du point B à un autre point E ou F du côté AC, sans dépasser ce côté, qui forme une figure de même périmètre et de même ou de plus grande aire.

Imaginons d'abord la ligne L_1 qui joint B et E; le segment BLC et la figure BL_1EC auront la même base BC et des périmètres égaux; on aura donc (**20**) BLC > BL_1EC, et par suite ABLCA > ABL_1EA.

Tirons la ligne L_1 de B en F; pour qu'elle renferme la plus grande aire possible, il faut qu'elle soit un arc de cercle (**20**, *remarque*) et qu'elle s'élève, du moins en partie, au-dessus de l'arc L; mais alors elle rencontre encore cet arc dans un point autre que B, et puisque, en outre, le prolongement de L, l'arc CD, la rencontre

évidemment, on est conduit à deux cercles ayant trois points communs, ce qui est impossible. — Si cette manière de raisonner ne paraît pas absolument satisfaisante, on pourra recourir à la suivante, plus directe encore.

Quelle que soit la forme de la ligne L_1, tirée de B en F, il faut qu'elle rencontre l'arc CD, prolongement de L, dans un certain point G (car elle ne peut ni passer entre le cercle et le côté AC, ni dépasser ce côté); on a donc un triangle mixtiligne FGC, dans lequel $FG + CG > CF$

ou
$$CF - CG < FG; \qquad (\alpha)$$

et puisque les figures ABLCA et ABL_1FA sont isopérimètres, on a

$$BLC + CF = BL_1G + GF. \qquad (\beta)$$

Retranchant l'inégalité (α) de l'équation (β), il vient

$$BLC + CG > BL_1G, \qquad (\gamma)$$

ce qui démontre que le segment de cercle BLCG est plus grand que la figure BL_1G, construite sur la même base BG. Mais on a encore à ajouter le triangle CFG à la première partie; donc, *à fortiori*,

$$ABLCA > ABL_1FA.$$

Remarquons encore, relativement à l'étendue et aux limites de ce théorème, qu'il subsiste toujours, quelque grand que puisse être le périmètre par rapport au côté donné AB, sauf le cas où l'on établirait la condition *que la ligne* L *ne doit pas non plus dépasser le prolongement de ce côté* AB; car alors le théorème ne continue à avoir lieu que jusqu'à ce que le point D tombe en B, et que le côté AB soit tangent en B au cercle L. Au-delà de ces limites le théorème se changerait en un des suivants (**37**). Si, au contraire, le périmètre diminue ou si l'angle A s'accroît, le point C s'approche du sommet A jusqu'à ce qu'il l'atteigne enfin; alors la figure se change en un segment de cercle (appartenant à la corde AB), limite en quelque sorte des figures comprises dans notre théorème, car il correspond à $AC = 0$, et si l'on continue à diminuer

le périmètre ou à augmenter l'angle A, la figure ne change plus, mais le côté AC n'est plus tangent au cercle, il le coupe en A.

35. *Si n'est pas la somme* L + AC *qui est donnée comme dans le théorème précédent, mais la différence* L — AC *ou* AC — L, *l'aire de la figure est un minimum* (*au lieu d'un maximum*) *quand celle-ci est une partie de cercle concave* (fig. 10) *entre la sécante* AB *et la tangente* AC.

Car joignons par la droite BA_1 le point B à un point A_1 suffisamment éloigné, pris sur le prolongement de AC; comme L — AC ou AC — L est donné et que AA_1 est connu, on connaîtra de même A_1C + L; or il est clair que ABLC devient un minimum quand l'aire A_1BLC est un maximum, ce qui a lieu quand la condition énoncée dans notre théorème est satisfaite.

36. *Si, sous les conditions des deux derniers théorèmes* (**34** *et* **35**), *la ligne* L *doit être composée de droites données* a, b, c,... *et de parties arbitraires* l, l_1, l_2,..., *la figure sera un maximum ou un minimum, selon qu'elle sera une partie convexe ou concave de cercle, comprise entre la sécante* AB, *la tangente* AC *et les cordes* a, b, c,...

La discussion des limites entre lesquelles ces deux théorèmes sont possibles, rentre dans les recherches mentionnées ci-dessus (**18**).

Nous ajouterons seulement que l'angle A, le côté AB et les droites a, b, c,... étant donnés, il y aura en général deux valeurs déterminées du périmètre, pour lesquelles la partie de cercle en question se transforme en polygone, parce que alors les arcs l, l_1, ... deviennent nuls : dans l'intervalle compris entre ces deux polygones le théorème est impossible.

37. *Entre toutes les figures isopérimètres dont le périmètre est composé de deux côtés* AB *et* AC, *de longueur arbitraire, formant entre eux un angle donné* A, *et d'une ligne quelconque* L, *qui les joint, sans les dépasser, celle-là est un maximum, qui est une partie convexe de cercle* ABLCA (*fig.* 11), *entre l'angle circonscrit* A (*en sorte que* L *est alors un arc de cercle tangent aux côtés* AB *et* AC). *Et si, au lieu du périmètre, c'est la différence entre la ligne* L_1 *au lieu de* L *et la somme des côtés* AB *et* AC *qui est donnée, la figure est un minimum, lorsqu'elle est une partie concave de cercle* ABL_1CA *entre l'angle circonscrit* A.

Démonstration. Si l'on joint un point quelconque D de la ligne L avec le point A, au moyen d'une droite AD, les parties DB et DC doivent être des arcs de cercle, tangents aux côtés AB et AC, pour que la figure soit un maximum (**34**); et comme le point D est absolument arbitraire, il faut que toute la ligne L soit un arc de cercle, qui est tangent en même temps aux deux côtés.

Remarques. I. Si l'angle A devient $= \pi$ ou $> \pi$, la partie de cercle convexe se transforme en un cercle entier, et le théorème perd alors tout caractère propre; la partie concave devient nulle sous la même condition.

II. Si les côtés de l'angle A sont limités au moyen d'une droite EF ou GH, qui est donnée avec ses angles adjacents E, F ou G, H, ces théorèmes s'appliquent également aux figures EBLCF et EBL_1CF. ou GBL_1CH et GBLCH, dont la premiere est un maximum quand le périmetre est donné, tandis que la dernière est un minimum quand la différence $(EB + CF) - L_1$ ou $(BG + HC) - L$ est donnée. Ces théorèmes restent les mêmes, quand on a $A = 0$, et que par-là les côtés EG et FH sont parallèles.

38. *Quand la ligne* L *ou* L_1 (**37**) *doit être composée de droites données* a, b, c,..., *et d'arcs arbitraires* $l, l_1, \ldots$, *la figure est pareillement un maximum ou un minimum, lorsqu'elle est une partie de cercle convexe ou concave entre les cordes* a, b, c,... *et l'angle circonscrit* A.

Les limites sont données par le cas où les lignes $l, l_1, l_2, \ldots$ deviennent nulles; alors la figure devient un polygone, dont les côtés AB et AC sont égaux.

39. I. *Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés des côtés* AB, AC *d'un angle donné* A, *arbitraires en longueur, plus d'une ligne* L *qui les joint sans les dépasser, et pour lesquelles la somme des lignes* L *et* AC *est donnée, la figure maxima est la partie de cercle convexe entre la tangente* AC *et la normale* AB (*qui passe par le centre*).

II. *Si la différence entre* L *et* AC *est donnée, la figure minima est une partie de cercle concave, entre la tangente* AC *et la normale* AB.

III. *Ces deux théorèmes ont également lieu quand la ligne* L *est composée de droites données* a, b, c,... *et de lignes arbitraires* $l, l_1, l_2, \ldots$

Démonstration. On n'a qu'à répéter la même figure symétriquement au-delà de AB; ces théorèmes découlent alors immédiatement des précédents (**37** et **38**).

40. I. *Entre toutes les figures isopérimètres, dont les périmètres sont composés des côtés* AC *et* AF, BD *et* BE *de deux angles* A *et* B *donnés, lesquels côtés sont de longueur arbitraire, plus d'une ou de deux lignes à volonté* l *et* l_1, *qui joignent les extrémités de ces côtés, si l'on suppose que les figures ne sortent pas des deux espaces angulaires* A *et* B, *la partie de cercle convexe* AClDBEl_1F (*fig.* 12, *a*) *entre les angles circonscrits* A *et* B *est un maximum. — Ou bien, si c'est la différence entre la somme des côtés du plus petit angle* A *et le reste du périmètre, c'est-à-dire si c'est la différence* (AC + AF) — (BD + BE + l + l_1) *qui est donnée, la figure minimum est la partie de cercle concave* AClDBEl_1FA (*fig.* 12, *b*) *entre les angles circonscrits* A *et* B

Démonstration. Complétons le cercle au moyen des arcs α et β; alors la partie convexe AClDBEl_1F = K (*fig.* 12, *a*) est composée du cercle $\alpha l \beta l_1 = K_1$ et des deux parties concaves Aα et Bβ entre les angles A et B. Imaginons une quelconque F des figures comprises dans le théorème, et retranchons-en les mêmes parties Aα et Bβ entre les angles A et B; il reste une figure F_1 dont le périmètre, comme il est facile de le voir, est *égal* au périmètre du cercle K_1 ou *plus petit*, de manière qu'on a toujours $K_1 > F_1$, et ensuite $K > F$.

Le raisonnement suivant peut également servir à cette démonstration. On montrera d'abord que le maximum ne peut pas être limité par les seuls côtés des angles A et B, qu'il ne peut donc pas être un quadrilatère, mais que les lignes l et l_1 sont nécessaires. On voit ensuite que ces lignes doivent être des arcs de cercle (**20**) tangents aux côtés (**34** ou **37**), et qu'ils appartiennent à un même cercle (**38**). Car si l'on joint deux points quelconques x et x_1 des arcs l et l_1 au moyen d'une droite $xx_1 = a$, celle-ci partage la figure en deux parties, dont chacune est un maximum, lorsqu'elle est une partie de cercle entre l'angle A ou B et la corde a (**38**).

II. La forme de la figure maximum n'est pas absolument déterminée, car les arcs l et l_1 peuvent changer de grandeur comme ils vou-

dront, pourvu que leur somme reste constante et que le cercle ne varie pas. Si donc l'un des angles, par exemple A, reste fixe, l'autre B pourra tourner autour du cercle pour occuper toutes les positions depuis celle où son côté BE tombe sur le prolongement du côté AF jusqu'à celle où l'autre côté BD tombe sur le prolongement de AC. Une des positions intermédiaires est celle dans laquelle la droite AB, qui joint les sommets des deux angles, divise en deux parties égales et ces angles et la figure elle-même. Pour la limite donnée par la coïncidence de BE et du prolongement de AF (*fig.* 12, *c*), le théorème peut être énoncé de la manière suivante :

Entre les figures isopérimètres, dont le périmètre est composé de trois droites consécutives CA, AB, BD *de longueur arbitraire, formant entre elles deux angles donnés* A *et* B, *et d'une ligne arbitraire* L, *qui joint la première et la dernière des droites, sans les dépasser, la figure maximum est celle dans laquelle la ligne* L *est un arc du cercle, tangent aux trois droites.* — Il existe un théorème analogue pour la partie concave du cercle.

III. Ajoutons le corollaire suivant, qui concerne le cas dans lequel la diagonale AB passe par le centre du cercle, et partage la figure en deux moitiés symétriques.

Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés de trois droites consécutives CA, AB, BD, *formant entre elles les angles donnés* $\frac{1}{2}$A *et* $\frac{1}{2}$B, *et d'une ligne arbitraire* l, *qui joint les côtés extérieurs* AC *et* BD *sans les dépasser, la somme des lignes* l, AC *et* BD *restant constante, la figure maximum est celle dans laquelle* l *est un arc de cercle qui a son centre sur le côté placé au milieu* AB *et qui est tangent aux côtés extérieurs* AC *et* BD.

41. *Si les conditions restent les mêmes que dans le théorème précédent* (**40**), *sauf qu'au lieu des angles* A *et* B, *c'est leur somme* S *qui est donnée, la figure est un maximum maximorum, lorsque ces angles sont égaux.*

Démonstration. Supposons les angles inégaux, soit A > B, et la partie de cercle, comme ci-dessus (**40**, II), de la forme (*fig.* 12, *c*); tirons la droite A_1B_1, de manière qu'on ait angle $CA_1B_1 = DB_1A_1$ et triangle AA_1B_1 équivalent à triangle ABB_1; alors la figure A_1CLDB_1 est équi-

valente à ACLDB. Si les triangles étaient isopérimètres, c'est-à-dire si l'on avait

$$AA_1 + A_1B_1 = AB + BB_1,$$

le triangle AA_1B_1 serait plus grand que le triangle ABB_1, parce que l'angle x est plus grand que y (**3**, II); mais les triangles sont supposés être équivalents : donc

$$AA_1 + A_1B_1 < AB + BB_1,$$

et par suite, périmètre A_1CLDB_1 < périmètre ACLDB. Mais il est clair que la première figure étant équivalente à la seconde, quoique son périmètre soit plus petit, pourra avoir une aire plus grande que celle-ci à même périmètre, d'autant plus qu'elle aussi pourra être une partie de cercle.

C'est la facilité de son application aux figures sphériques qui nous a fait choisir cette démonstration; car il y en a de plus simples et de plus directes pour les figures planes seules. Par exemple, tirons la droite A_1B_1 de manière qu'on ait

$$\text{angle } A_1 = \text{angle } B_1 \text{ et } AA_1 + A_1B_1 = AB + BB_1;$$

alors, puisque $x > y$, le triangle AA_1B_1 est plus grand que ABB_1 (**3**, II), et à périmètre égal la figure A_1CLDB_1 plus grande que ACLDB, etc. — Enfin la figure dont nous nous occupions dans le n° **40**, III, peut servir à une autre démonstration du même théorème.

42. I. *Entre toutes les figures isopérimètres dont les périmètres sont composés :*

1°. *Des côtés de longueur arbitraire de* m *angles donnés* A, B, C,... *dont la somme est plus grande que* $(m - 2)\pi$;

2°. *De lignes quelconques*, l, l_1, l_2,..., *dont le nombre est arbitraire depuis* 1 *jusqu'à* m *et qui joignent des côtés de différents angles;*

Si l'on exige en outre qu'aucune de ces figures ne sorte des espaces angulaires, la figure maximum est une partie de cercle convexe entre les angles circonscrits A, B, C,...

Si A, *le plus petit des angles donnés, est assez petit pour que son angle supplémentaire soit plus grand que la somme des angles sup-*

plémentaires de tous les autres angles donnés, et si l'on connaît en même temps la différence entre la somme des côtés de l'angle A *et le reste du périmètre, la figure est un minimum, lorsqu'elle est une partie de cercle concave entre les angles circonscrits* A, B, C,...

Cette partie de cercle concave est de même forme que celle que nous avons considérée dans le n° **40**. Dans la suite, la seconde partie sera toujours sous-entendue.

II. *Si l'on donne seulement la somme des angles et non chaque angle à part, la figure est un maximum maximorum, lorsque ces angles sont égaux, et que la figure est également une partie de cercle entre eux.*

La démonstration de ces théorèmes est analogue à celle du n° **40**.

43. I. *L'aire d'un polygone de* m *côtés, dont les angles et le périmètre sont donnés* [*], *est un maximum lorsque ce polygone est circonscriptible à un cercle* [**].

II. *Si le périmètre seul est donné, le polygone de* m *côtés est un maximum, quand il est equiangle et circonscriptible à un cercle, c'est-à-dire quand il est régulier.*

Ces théorèmes découlent comme limites des précédents (**42**) quand on y fait diminuer la somme des angles donnés jusqu'à ce qu'elle devienne égale à $(m-2)\pi$; les arcs l, l_1,..., deviennent alors nuls, et la figure se change en un polygone de m côtés.

---

[*] Il suffit pour le polygone plan de m côtés, que $m-1$ angles soient donnés, car le dernier angle est alors déterminé. Quant au polygone sphérique de m côtés, il faut remarquer que son aire serait fixée dès que ses m angles seraient donnés : il faut donc énoncer ainsi le théorème en ce qui le concerne : *Si les angles d'un polygone sphérique de* m *côtés sont donnés, son périmètre est un minimum lorsqu'il est circonscriptible à un cercle;* le théorème sur les figures planes devient plus analogue à celui-ci, quand on suppose donnés les angles et l'aire.

[**] Je crois que c'est *Lhuilier* qui, dans son ouvrage mentionné ci-dessus, a été le premier à énoncer ce théorème pour les figures planes. Il le démontre au moyen du calcul, d'une manière très ingénieuse, mais assez compliquée. On ne le retrouve plus dans les auteurs qui lui sont postérieurs; ils paraissent avoir reculé devant la démonstration.

On peut aussi démontrer directement ces théorèmes, conformément au n° **40**.

44. I. *Si le périmètre d'une figure doit être composé :*

1°. *Des côtés de longueur arbitraire de* m *angles donnés* A, B, C,... *dont la somme est plus grande que* $(m - 1)\pi$;

2°. *D'une droite* g *de longueur arbitraire ;*

3°. *De lignes quelconques* $l, l_1, l_2, \ldots$;

Si en outre la figure doit être renfermée dans les espaces angulaires donnés, et si, à l'exception de la droite g, *la longueur de tout le reste du périmètre est donnée, l'aire comprise est un maximum, quand la figure est une partie de cercle entre les angles circonscrits* A, B, C,..., *et le diamètre* g.

Si donc la base g aboutit par son extrémité à un des côtés des angles, il faut qu'elle soit perpendiculaire sur lui.

On obtient le corollaire suivant, en faisant diminuer les angles jusqu'à ce que leur somme soit égale à $(m - 1)\pi$.

II. *Entre tous les polygones que l'on peut construire sur une base arbitraire* g *la somme* s *des deux angles adjacents à cette base étant supposée égale à* π *ou* 180°, *et les autres angles étant donnés ainsi que la somme des côtés (la base* g *non comprise), le polygone maximum est celui qui est composé de côtés tous tangents au cercle dont la base* g *est le diamètre. Les angles à la base sont donc droits.*

Si, au lieu des angles A, B, C,...., la somme de deux, de trois, etc., d'entre eux est donnée, qu'ils se suivent ou non dans le périmètre, l'aire est la plus grande possible quand ils sont égaux.

Ces théorèmes découlent du précédent (**42**), quand on répète la figure symétriquement de l'autre côté de la base g.

45. I. *Si l'on supprime la droite* g, *et si l'on suppose que la somme des* m *angles soit plus grande que* $(m - \frac{3}{2})\pi$, *que l'angle* A *soit plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *et que de ses côtés* AA_1, AA_2, *l'un* AA_1 *soit arbitraire, tandis que le reste du périmètre est donné ; la figure est un maximum, lorsqu'elle est une partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C,..., *la tangente* AA_2 *et la normale* AA_1.

Quand la somme des angles devient $= (m - \frac{3}{2})\pi$, le théorème s'énonce ainsi :

II. *Si les angles d'un polygone sont donnés, si l'un des angles* A_1 *adjacents à sa base* AA_1 *est égal à* $\frac{1}{2}\pi$, *et l'autre* A *plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$; *si en outre la somme de tous les côtés, moins la base, est donnée; ce polygone est un maximum, lorsque ces côtés sont tangents à un cercle dont le centre est sur la base* AA_1.

III. *Si, au lieu des angles* A, B, C,..., *leur somme est donnée, la figure devient, dans les deux cas précédents* (I et II), *un maximum maximorum, lorsqu'on a*

$$B = C = D = \ldots = 2A,$$

les conditions indiquées plus haut étant d'ailleurs remplies; en outre, les côtés compris entre les angles B, C, D,..., *seront égaux, et chacun d'eux sera double du côté perpendiculaire sur la base en* A_1.

Ces théorèmes découlent du n° **42**, tout-à-fait comme ceux du n° **44**.

46. I. *Le périmètre d'une figure étant composé :*

1°. *Des côtés de* m *angles donnés* A, B, C, D,..., *dont la somme est plus petite que* $(m - 2)\pi$;

2°. *De lignes arbitraires* $l, l_1, l_2, \ldots$;

Si les angles A *et* B *sont aigus tous les deux, et si de leurs côtés* AA_1, AA_2 et BB_1, BB_2, *deux, par exemple* AA_1 *et* BB_1, *ne forment qu'une même droite* AB, *si, en outre, tout le périmètre, à l'exception de la base* AB, *est donné, l'aire de la figure est un maximum lorsqu'elle est une partie de cercle entre les angles circonscrits* C, D, ..., *les tangentes* AA_2, BB_2, *et la normale* AB.

II. *Etant donnés les angles d'un polygone, avec cette condition que les angles* A *et* B, *adjacents à la base* AB, *soient aigus, ou tout au plus droits; si en outre la somme de tous les côtés, excepté la base, est donnée, le polygone est un maximum, lorsque tous ces côtés sont tangents à un cercle dont le centre est sur la base* AB. *De plus :*

III. *Les angles étant arbitraires, le polygone est un maximum, lorsque* $C = D = \ldots = 2A = 2B$; *alors tous les côtés, à l'exception de la base, sont égaux, ou*

IV. *Si l'angle* A, *qui n'est pas plus grand que* $\frac{1}{2}\pi$, *est seul donné de grandeur, le polygone est un maximum lorsque* $2B = C = D = \ldots$.

En même temps tous les côtés sont égaux, à l'exception de ceux qui forment l'angle A.

Il ne sera pas inutile d'énoncer séparément l'application de ce théorème (IV) au quadrilatère et au triangle :

1°. Entre tous les quadrilatères que l'on peut construire avec un angle donné $A < \frac{1}{2}\pi$ et avec trois côtés BC, CD, DA, dont la somme est donnée, le plus grand est celui dans lequel l'angle $C = D = 2B$, et le côté $BC = CD$; — et si $A = \frac{1}{2}\pi$, il faut en outre qu'on ait $2AD = BC = CD$.

2°. Entre tous les triangles ABC qui ont le même angle donné $A < \frac{1}{2}\pi$ adjacent à la base AB, et dont la somme des côtés $AC + BC$ est la même, celui-là est un maximum dans lequel l'angle au sommet C est le double de l'autre angle à la base B [*]; — et si $A = \frac{1}{2}\pi$, on a $C = 2B = \frac{1}{3}\pi$, et en outre $BC = 2CA$, ce qui est une propriété connue.

47. I. *Si le périmètre d'une figure est composé :*

1°. *Des côtés de* m *angles donnés* A, B, C,..., *dont la somme est plus grande que* $(m - 1)\pi$;

2°. *Des lignes arbitraires* $l, l_1, l_2, \ldots$;

Si la longueur des côtés AA_1 *et* AA_2 *qui forment l'angle* A *est arbitraire, tandis que la longueur du reste du périmètre est donnée, la figure maximum est la partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C,... *et l'angle au centre* A. — Les côtés AA_1 et AA_2 sont donc des rayons du cercle; si l'un d'eux aboutit par son extrémité, non à un arc (l), mais à un côté d'un angle, il est perpendiculaire sur lui.

II. *Si la somme de deux angles quelconques* A_1 *et* A_2 *d'un polygone, entre lesquels un seul angle* A *est compris, est égale à* π, *et si en même temps, et les autres angles* A, B, C,..., *et la somme de tous les côtés non adjacents à l'angle* A *sont donnés, ce polygone est un maximum lorsque les côtés arbitraires* AA_1 *et* AA_2 *sont des rayons d'un cercle auquel tous les autres côtés sont tangents; de manière que les angles* A_1, A_2 *sont égaux et droits.*

---

[*] Même dans ce cas, le plus simple de tous, il est impossible de construire géométriquement la figure maxima, car elle suppose l'exécution de la trisection de l'angle supplémentaire de A, qui est égal à 3B.

III. *Si l'angle* A *seul est donné, les autres conditions restant les mêmes, le polygone est un maximum lorsque les autres angles* B, C,..., X *sont égaux; en même temps les côtés compris entre ces angles deviennent égaux, de même que ceux qui sont adjacents au premier et au dernier angle* BA_1 *et* XA_2, *qui sont de longueur moitié des autres.* — Dans ce cas la figure s'approche d'un secteur de polygone régulier, ce qu'elle devient en effet quand l'angle A est commensurable à π.

Ces théorèmes sont indépendants de la grandeur de l'angle A; s'il devient successivement $= \pi$, 2π, les théorèmes se changent en ceux des n° **44** et **42**.

48. I. *Si, toutes choses restant les mêmes, l'un des côtés de l'angle* A, *par exemple* AA_2, *est donné, de manière que l'autre* AA_1 *seulement demeure arbitraire, la figure est un maximum lorsqu'elle est une partie de cercle convexe entre les angles circonscrits* B, C,..., *la sécante* AA_2 *et la normale* AA_1.

Pour une certaine longueur de la partie donnée du périmètre, la figure se change en un polygone, limite des figures du théorème.

II. *Si l'angle* A *est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *et si, comme dans le cas précédent,* AA_2 *est donné de même que la longueur du reste du périmètre, y compris le côté* AA_1, *la partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C,..., *la tangente* AA_1 *et la sécante* AA_2, *est un maximum.*

La limite est encore donnée par un polygone.

49. I. *Entre toutes les figures de périmètre donné et composé :*

1°. *De* n *droites données,* a, b, c,...;

2°. *Des côtés non déterminés des* m *angles donnés* A, B, C,... *dont la somme est plus grande que* $(m - 2)\pi$;

3°. *De lignes arbitraires* l, l_1, l_2,..., *dont le nombre est arbitraire de* 1 *jusqu'à* $m + n$;

Si les figures ne dépassent aucun des espaces compris dans les m *angles, la partie convexe de cercle entre les* n *cordes* a, b, c,..., *et les* m *angles circonscrits* A, B, C,..., *est un maximum.*

II. *Si, au lieu d'un certain nombre de côtés ou d'angles, c'est leur somme qui est donnée, les autres conditions restant les mêmes, l'aire de la figure augmente quand on rend les éléments appartenant à la*

même somme égaux entre eux; il s'ensuit que pour un même périmètre, une même somme des n *droites et une même somme des* m *angles, la figure qui a ses côtés et ses angles égaux est un maximum maximorum.*

A la limite de ces deux théorèmes, pour une certaine longueur du périmètre, la partie de cercle se change en un polygone qui est en partie inscrit et en partie circonscrit au cercle, et qui peut avoir chaque nombre de côtés depuis $n+m+1$, qui est le plus petit nombre, jusqu'au plus grand $2n+m$ ou $n+2m$ (selon qu'on a $m > n$ ou $n > m$); cela dépend de la manière dont on fait suivre les angles et les côtés dans le périmètre. Ces théorèmes renferment du reste plusieurs des précédents.

59. I. *Si les périmètres des figures contiennent, outre les parties énumérées ci-dessus* (**49**, I), *une droite* g *de longueur arbitraire, et si la somme des* m *angles donnés est plus grande que* $(m-1)\pi$, *la figure maxima est une partie de cercle convexe entre les cordes* a, b, c,..., *les angles circonscrits* A, B, C,..., *et le diamètre* g. En faisant diminuer le périmètre jusqu'à une certaine longueur, on obtient la limite des parties de cercle qui est un polygone.

II. *Le périmètre restant toujours composé comme dans* (**49**, I), *si l'angle* A *est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *si l'un de ses côtés* AA_1 *et* AA_2, *par exemple* AA_1, *n'est pas compris dans la longueur donnée du périmètre, et si la somme de tous les angles est plus grande que* $(m-\frac{3}{2})\pi$, *la figure maximum est une partie de cercle entre les cordes* a, b, c,..., *les angles circonscrits* B_1, C,..., *la tangente* AA_2 *et la normale* AA_1.

Si le côté AA_2 était donné séparément, il faudrait qu'il fût une sécante de la partie de cercle.

III. *Si l'angle* A *est de grandeur quelconque, mais donnée, si ses deux côtés ne sont pas compris dans la partie de périmètre donnée, et si la somme des* m *angles est plus grande que* $(m-1)\pi$, *il faut que dans le maximum* A *soit un angle au centre, et que ses côtés* AA_1 *et* AA_2 *soient des rayons de la partie de cercle.*

Ce dernier théorème en renferme plusieurs autres, que l'on obtient quand on fait successivement $A=\pi$, 2π, ou quand on supprime les n côtés a, b, c,..., ou les m angles A, B, C,... Sa limite, que l'on obtient en diminuant jusqu'à un certain point la partie de périmètre donnée, est un polygone.

Remarque générale.

51. La plupart des théorèmes précédents s'appliquent aux polygones limites des parties de cercle; mais si l'on examine ces polygones indépendamment des recherches précédentes, si l'on donne à leurs éléments variables d'autres valeurs que celles qui appartiennent aux limites des parties de cercle, on voit que, même sous ce nouveau point de vue, ces polygones limites ne sont encore que des cas particuliers. Car quand on sort de ces valeurs limites en assujétissant la figure à rester toujours un polygone de même nombre de côtés (qui ne doit ni contenir des arcs $l, l_1, \ldots$, ni se changer en partie de cercle), le maximum est assujéti à des conditions absolument différentes, qui changent encore, selon que les valeurs données aux éléments sont plus *grandes* ou plus *petites* que les valeurs limites.

On parvient à ces propriétés du polygone, en discutant les cas de maximum et de minimum d'une manière plus générale et plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici; dans tous les cas où les éléments nécessaires pour la détermination complète du polygone ne sont pas tous donnés, on recherchera les conditions de maximum et minimum relatives aux autres éléments. Le nombre des divers cas est très grand même quand on ne s'occupe que des différentes combinaisons des côtés, des angles, de la somme de plusieurs côtés ou angles, et de l'aire. Il paraît du reste que ces recherches devront être fondées (à l'instar de la théorie sur l'égalité des polygones) sur les propriétés du quadrilatère, de manière qu'il importerait de discuter d'abord toutes les questions que le quadrilatère peut offrir; mais leur nombre s'élève jusqu'à 25 ou 30, et l'on ne pourra guère répondre, avec les moyens dont nous disposons maintenant, qu'à la moitié d'entre elles. Au surplus il est probable que les divers cas sont tellement enchaînés entre eux, qu'il suffira d'en démontrer quelques-uns; les autres découleront immédiatement de ceux-là.

Théorèmes qui concernent plusieurs figures en même temps, ou des figures qui sont déterminées par des limites fixes ou par des éléments donnés.

52. I. *Si nous appelons* S *la somme des deux figures* $a\alpha$ *et* $b\beta$, *construites sur des bases* a *et* b, *respectivement données, et avec des*

lignes arbitraires α *et* β *dont la somme* $\sigma = \alpha + \beta$ *est également donnée,* S *sera un maximum lorsque les figures sont des segments de cercles de rayons égaux, pourvu que le segment ayant pour corde la plus petite base* b *soit un segment à angle aigu.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un cercle ABC (*fig.* 13) dans lequel les bases données a et b, prises comme cordes, soutendent des arcs α et β, dont la somme soit égale à σ, mais plus petite que la circonférence du cercle; il est clair qu'alors la somme des deux segments $a\alpha + b\beta$ est un maximum sous les conditions données. Car, la figure $ab\gamma$ restant invariable, si l'on fait varier comme on voudra les arcs α et β, mais de manière que leur somme soit toujours égale à σ, l'aire des figures renfermées par ces arcs et par l'arc fixe γ sera toujours plus petite que celle du cercle ABC; donc la somme des aires des deux figures formées par ces arcs et par les bases données a et b sera plus petite que celle des aires des segments du cercle $a\alpha$ et $b\beta$. Le segment $b\beta$ ayant pour base la plus petite corde, est nécessairement à angle aigu, tandis que l'autre segment peut être indifféremment ou à angle aigu ou à angle obtus.

Il reste encore à démontrer que le cercle supposé existe dans tous les cas.

Le plus petit des cercles dans lesquels les bases données a et b puissent être des cordes, est celui qui a la plus grande corde a pour diamètre. Supposons pour un moment que le cercle ABC soit ce cercle M, alors trois cas sont possibles, savoir :

(1) $$\alpha + \beta = \sigma,$$

(2) $$\alpha + \beta > \sigma,$$

(3) $$\alpha + \beta < \sigma.$$

Dans le premier cas le cercle M satisfait aux conditions du théorème.

Dans le second cas faisons croître le cercle M, en écartant en même temps l'une de l'autre les cordes a et b; les centres de tous les cercles ainsi obtenus resteront évidemment entre les cordes a et b dans l'espace $ab\gamma$, et puisque d'après cela les deux segments sont à angles aigus, chacun des arcs α et β, et conséquemment leur somme ira continuellement en diminuant; cette somme s'approchera ainsi de plus en plus de

σ, jusqu'à ce qu'elle lui devienne égale pour un certain cercle M_1 qui satisfait aux conditions du théorème.

Dans le troisième cas on fera également grandir le cercle, mais en rapprochant en même temps la corde a de la corde b; alors le centre est dans le segment $a\alpha$, dont l'angle devient obtus, tandis que celui du segment $b\beta$ reste aigu; l'arc α croît donc et l'arc β diminue. Mais l'accroissement de α surpasse évidemment le décroissement de β : la somme $\alpha + \beta$ va donc en grandissant, et puisque en outre α peut acquérir toute grandeur voulue, tandis que β ne peut jamais devenir plus petit que b, la somme $\alpha + \beta$ obtiendra toutes les valeurs possibles et deviendra aussi égale à σ pour un certain cercle M_1, qui sera le cercle cherché.

On peut donc toujours satisfaire aux conditions du théorème, pourvu que $\sigma > a + b$, mais on ne le peut que d'une manière seulement.

Dans tous les cas le segment $b\beta$ sur la plus petite corde est constamment à angle aigu, tandis que l'autre $a\alpha$ peut être à angle aigu, droit ou obtus.

II. Le théorème ci-dessus (I) ne se rapporte qu'au maximum absolu ou principal de la somme des deux figures, qui varient autant que les éléments donnés le permettent. Si l'on veut traiter cet objet d'une manière plus complète, on s'y prendra ainsi qu'il suit :

Que l'on répartisse comme on voudra la somme σ sur α et β, parties des périmètres des figures $a\alpha$ et $b\beta$, toujours est-il que chacune d'elles, de même que leur somme S, sera un maximum, lorsque ces figures sont des segments de cercle. Nous pouvons donc admettre que les figures $a\alpha$ et $b\beta$ sont des segments de cercle. Si l'on fait maintenant varier leurs arcs α et β d'une manière continue, sous la condition que toujours $\alpha + \beta$ soit égal à σ, la somme de leurs aires $a\alpha + b\beta = S$ changera aussi continuellement; et l'on peut se demander : *Sous quelles conditions, et combien de fois cette somme devient un maximum ou un minimum?*

La discussion ultérieure de cette question donne le résultat suivant : *Si les cordes* a *et* b *de deux segments de cercle* $a\alpha$ *et* $b\beta$, *et la somme de leurs arcs* $\sigma = \alpha + \beta$ *sont données, la somme de leurs aires* $S = a\alpha + b\beta$ *est en général un maximum ou un minimum quand les arcs appartiennent à des cercles de rayons égaux : si aucun des deux segments*

ne doit être plus grand que le cercle entier, la condition d'avoir des rayons égaux ne peut être remplie que de trois manières au plus; mais si les segments peuvent aussi être plus grands que le cercle, le nombre des cas satisfaisant à la condition augmentera, et d'autant plus que la somme σ sera plus grande relativement aux cordes a *et* b.

Pour le cas particulier où ni α ni β ne doivent être plus grands que le cercle, l'existence des cercles dans lesquels un maximum ou un minimum a lieu, peut être démontrée de la manière suivante :

Si l'on regarde les droites a et b comme cordes d'un cercle quelconque, et si l'on désigne les petits arcs qu'elles soutendent par α et β, et les grands arcs par α_1 et β_1, on peut former avec ces quantités les quatre sommes différentes $\alpha + \beta$, $\alpha_1 + \beta$, $\alpha + \beta_1$, $\alpha_1 + \beta_1$, et l'on aura à rechercher combien il y a de cercles dans lesquels une de ces sommes est égale à σ.

Nous avons déjà démontré ci-dessus (I) que, en ce qui concerne les sommes $\alpha + \beta$ et $\alpha_1 + \beta$ dans lesquelles entre le plus petit arc β soutendu par la plus petite corde b, il y a toujours un et seulement un cercle M_1 qui satisfait à l'une ou l'autre. Il reste donc à examiner combien il y a de cercles correspondants à une des sommes $\alpha + \beta_1$ et $\alpha_1 + \beta_1$, c'est-à-dire au cas où le segment ayant la plus petite des bases pour cordes est à angle obtus.

Désignons par N le cercle dans lequel la somme du plus petit arc α soutendu par a, et du plus grand arc β_1 soutendu par la plus petite corde b devient un minimum $= \sigma_1$; trois relations sont alors possibles entre σ_1 et σ; on aura

(1) $\sigma_1 > \sigma$,

ou (2) $\sigma_1 = \sigma$.

ou (3) $\sigma_1 < \sigma$.

Pour le cas (1) il est clair qu'il n'y a pas de cercle qui satisfasse à la condition ci-dessus;

Pour le cas (2) le cercle N lui-même est le cercle cherché;

Pour le cas (3), enfin, il y a deux cercles qui remplissent la condition exigée; on s'en assure par le raisonnement suivant :

Il est clair que la somme des deux grands arcs $\alpha_1 + \beta_1$ est un minimum dans le cercle M, qui a la plus grande corde a pour diamètre.

Dans ce cas, à proprement parler, α_1 n'est plus un grand arc, car on a $\alpha_1 = \alpha$. Soit σ_2 cette somme minimum, il y a alors trois combinaisons possibles; on a

	(a)	$\sigma_1 < \sigma$,	et en même temps	$\sigma_2 < \sigma$,
ou	(b)	$\sigma_1 < \sigma$,		$\sigma_2 = \sigma$,
ou	(c)	$\sigma_1 < \sigma$,		$\sigma_2 > \sigma$.

Pour chacune de ces trois relations on peut, en partant des cercles N et M, parvenir à deux cercles qui remplissent la condition ci-dessus énoncée.

A. Dans l'hypothèse (a) faisons *premièrement* croître le cercle N, la somme des arcs $\alpha + \beta_1$ croîtra de même (parce que au commencement elle est un minimum égal à σ_1, et que β_1 croît plus vite que α ne diminue), et puisque β_1 peut devenir de grandeur quelconque, tandis que α ne peut diminuer que jusqu'à la limite a, il faut qu'on parvienne à un cercle N_1 qui satisfasse à cette condition, que $\alpha + \beta_1$ soit égal à σ. — *Secondement* faisons croître le cercle M, la somme $\alpha_1 + \beta_1$ croîtra avec lui, et nous parviendrons à un cercle M_2, dans lequel on aura $\alpha_1 + \beta_1 = \sigma$, lequel est donc le cercle en question.

B. Dans l'hypothèse (b), c'est *premièrement* le cercle M lui-même qui satisfait à la condition. — *Secondement* lorsque l'on fait croître le cercle N, $\alpha + \beta_1$ augmente en même temps jusqu'à ce que l'on parvienne enfin à un cercle N_1 dans lequel on aura $\alpha + \beta_1 = \sigma$.

C. Faisons dans l'hypothèse (c) croître *premièrement* le cercle N; on parviendra comme ci-dessus à un cercle N_1 qui rend $\alpha + \beta_1 = \sigma$; — *secondement* faisons diminuer le cercle N; par cela même $\alpha + \beta_1$ croîtra, et, avant d'atteindre le cercle minimum M, on parviendra à un cercle N_2 dans lequel $\alpha + \beta_1$ est égal à σ.

On démontrera géométriquement, au moyen du théorème (I), que les segments des différents cercles, qui remplissent la condition mentionnée ci-dessus, ont les propriétés suivantes :

(α) Dans tous les cercles désignés par N_1, la somme des segments $a\alpha + b\beta_1$ est un maximum relatif;

(β) La somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ dans les cercles M_2 et M (dans le cas B), et la somme $a\alpha + b\beta_1$ dans le cercle N_2, sont des minima;

(γ) Dans le cercle désigné par N, au cas spécial (2), la somme des segments $a\alpha + b\beta_1$ n'est ni un maximum ni un minimum, car ce cas peut être considéré comme limite des deux parties du cas (C), puisque les cercles N_1 et N_2 se confondent tous les deux avec le cercle N, et par conséquent neutralisent leurs propriétés opposées.

Il y a encore deux limites pour la somme des segments en question; on parvient à ces limites en faisant continuellement diminuer l'un des arcs α et β (et ici ce ne sont plus les petits arcs, mais des arcs quelconques soutendus par les cordes a et b que nous désignons par α et β); en dernier lieu β coïncidera avec sa corde b, ou α avec la corde correspondante a; la somme $a\alpha + b\beta$ diminue simultanément, elle est donc un minimum lorsque α ou β ont atteint leurs limites. Chacun de ces minima limites n'est composé que d'un seul segment $a\alpha'$ ou $b\beta'$, l'autre segment devenant nul; les arcs de ces segments seront relativement $\alpha' = \sigma - b$ ou $\beta' = \sigma - a$; et puisque de ces deux segments celui qui a la plus petite corde est plus petit, on a $a\alpha' > b\beta'$.

III. Ces résultats subissent différentes modifications, selon les différentes longueurs relatives des cordes a et b. Considérons, par exemple, les deux cas spéciaux suivants:

1°. Soit $a = b$; alors les cercles N et M, N_1 et M_1 se confondent, le cercle N_2 devient impossible, et quant aux autres cercles, il faut avoir égard aux relations suivantes:

(α) Si l'on a $\sigma > \pi a$ ou $\sigma = \pi\alpha$, c'est-à-dire si la somme donnée σ n'est pas plus petite que le cercle M, qui a a pour diamètre, les arcs α_1 et β ($= \alpha$) forment pour le maximum principal (I) une circonférence entière de cercle M_1, c'est-à-dire que les segments $a\alpha_1$ et $b\beta$ composent l'aire du cercle M_1. Dans le cercle M_2, dans lequel la somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ est un minimum (II, β), les deux segments sont égaux et tous les deux à angle obtus; leur somme est donc plus grande que l'aire du cercle M_2.

(β) Si l'on a $\sigma < \pi a$, le maximum principal est le seul possible; il a lieu quand les deux segments sont égaux et à angle aigu.

Dans les deux cas les maxima limites (II) ne changent pas.

2°. Si l'on a $b = 0$, β et $b\beta$ deviennent également nuls, tandis que β_1 est la circonférence du cercle entier, et $b\beta_1$ est l'aire de ce cercle.

Dans ce cas le maximum principal n'est donc qu'un seul segment $a\alpha$ ou $a\alpha_1$, et le cercle N dans lequel la somme $\alpha + \beta_1$ $(= \alpha + \alpha_1)$ devient un minimum $= \sigma_1$ (II) est doué de la propriété particulière : *que la somme des tangentes* AD *et* BD, *menées aux extrémités de la corde* a *et se coupant en* D, *est égale a* $\alpha + \beta_1$, *c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme du petit arc* α *et de la circonférence du cercle entier* β_1. Le minimum σ_2 de la somme $\alpha_1 + \beta_1$ qui a lieu pour le cercle M dont a est le diamètre, est alors égal à $\frac{3}{2}\pi a$.

(α) Si $\sigma_1 < \sigma$, et en même temps $\sigma_2 > \sigma$ (II, C), les deux cercles N_1 et N_2 ont lieu, et comme nous avons vu que $a\alpha + b\beta_1$ (c'est-à-dire la somme du segment $a\alpha$ et du cercle entier N_1) est un maximum dans le premier, $a\alpha_1 + b\beta_1$ est un minimum dans le second, et l'on a $N_1 > N$ et $N_2 < N$ (II, C).

(β) Quand on a $\sigma_2 < \sigma$, M_2 au lieu de N_2 est le cercle dans lequel $a\alpha_1 + b\beta_1$ devient un minimum.

On peut énoncer ainsi les deux théorèmes (α) et (β) :

Si l'on mène une corde AB = a *dans un cercle quelconque* β_1, *et si l'on tire par ces extrémités les tangentes* AD *et* BD, *la somme des aires du cercle entier et du segment à angle aigu est un maximum ou un minimum, selon que la somme de ces tangentes est plus petite ou plus grande que la somme de la circonférence entière et du petit arc, c'est-à-dire selon qu'on a*

$$AD + BD \lesseqgtr \beta_1 + \alpha;$$

il est bien entendu qu'ici l'arc α *et le cercle* β_1 *peuvent changer et avoir des rayons différents quelconques, pourvu que la corde* a *reste constante et que la somme* $\alpha + \beta_1$ *soit toujours égale à* σ.

La somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ est de même un minimum dans tous les cas.

IV. Les corollaires suivants découlent des théorèmes précédents :

1°. Un segment à angle aigu $b\beta$ est plus grand que le secteur $C\gamma$ dans le même cercle C si l'arc du secteur est égal au double de la différence entre l'arc et la corde du segment, c'est-à-dire si $\gamma = 2(\beta - b)$. — Ce théorème est du reste pareillement applicable aux segments qui

surpassent le demi-cercle jusqu'à un certain segment à angle obtus qui est précisément égal au secteur, et au-delà duquel le secteur devient plus grand que le segment. — De même la différence entre les aires du cercle et du polygone convexe inscrit est plus grande qu'un secteur dont l'arc est égal à deux fois la différence entre les périmètres de ces figures, si toutefois le centre C du cercle n'est pas en dehors du polygone. De même la différence de deux segments à angles aigus $b\alpha - b_1\beta_1$, ayant la même corde b, est plus grande qu'un secteur $C\gamma$ du plus petit des deux cercles, si l'on a $\gamma = 2(\alpha - \beta)$.

2°. Si trois segments de cercles $a\alpha$, $a\beta$ et $a\gamma$, sont placés du même côté de leur corde commune a, et que leurs arcs soient liés par l'équation $2\beta = \alpha + \gamma$, les aires des lunules $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ sont liées par les relations suivantes :

(1). Si $\beta < \pi$, on a $\alpha\beta > \beta\gamma$;
(2). Si $\beta > \pi$, on a $\alpha\beta < \beta\gamma$.

53. *Les conditions restant les mêmes que dans le théorème* (52, 1), *sauf que la somme* $s = a + b$ *est donnée au lieu des bases* a *et* b, *la somme* S *des deux segments* $a\alpha$ *et* $b\beta$ *est d'autant plus petite que la différence entre* a *et* b *est plus petite, de manière que la somme* S *est un minimum maximorum, lorsqu'on a* $a = b = \frac{1}{2}s$, *et que cette somme devient la plus grande possible ou un maximum limite, lorsque, par exemple, on a* $a = s$ et $b = 0$; *alors c'est le segment* $a\alpha$ *qui est ce maximum, tandis que* $b\beta$ *est nul.*

Démonstration. Prenons a et b de grandeurs quelconques, mais différentes; soit pour fixer les idées $a > b$ (*fig.* 14), et admettons que les segments $a\alpha$ et $b\beta$, dont la somme représente dans ce cas le maximum principal, appartiennent à un même cercle, et que leurs cordes AC et BC, c'est-à-dire a et b, aient une extrémité C commune. Soit en outre $a_1 + b_1 = a + b = s$, et de plus $a_1 - b_1 < a - b$; on aura d'abord le triangle $AC_1B > ACB$ (5). Imaginons les segments de cercle $a_1\alpha_1$ et $b_1\beta_1$, construits sur les bases a_1 et b_1, dont la somme est le maximum dans ce cas; les trois arcs α_1, β_1 et γ forment une figure plus petite que le cercle isopérimètre $\alpha\beta\gamma$, et puisque cette figure est composée des segments $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c\gamma$ et du triangle AC_1B, il faut que $a_1\alpha_1 + b_1\beta_1$ soit plus petit que $a\alpha + b\beta$.

54. *Étant données les droites* a, b, c, d,..., *bases d'un nombre quelconque de figures* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$,..., *et la somme* $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \ldots$, *des lignes* α, β, γ, δ,..., *qui complètent leurs périmètres, la somme de leurs aires ne peut être un maximum que quand ces figures sont toutes des segments de cercles égaux; il faut en outre, pour le maximum principal, que le segment ayant la plus grande base puisse seul être à angle obtus.*

Ce théorème découle du précédent (**52**, I).

On peut se demander s'il n'y a pas plusieurs cas dans lesquels les figures satisfassent aux conditions du théorème, qui consistent en ce que ces figures soient des segments de même cercle, et qu'aucune d'elles ou que celle seulement qui a la plus grande corde soit à angle obtus; et si dans chacun de ces cas la somme des aires est un *maximum*?

Soit a la plus grande des bases, et M le plus petit cercle que nous puissions considérer, c'est-à-dire soit M le cercle qui a cette base a pour diamètre : inscrivons dans ce cercle les autres bases b, c, d,..., comme cordes; appelons β, γ, δ,... les plus petits arcs qui leur correspondent, et α, α_1 les arcs correspondants à a (α_1 deviendra le plus grand arc, quand nous ferons croître dans la suite le cercle); trois relations sont alors possibles : on a

$$(1) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots < \sigma.$$

ou

$$(2) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sigma,$$

ou

$$(3) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots > \sigma.$$

I. Dans la première hypothèse faisons croître le cercle M et prenons α_1 au lieu de α; on parviendra toujours à un cercle M_1 dans lequel on aura

$$\alpha_1 + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sigma;$$

car, supposé même que la somme $\beta + \gamma + \delta + \ldots$ décroisse au commencement plus que l'arc α_1 ne croît, l'inverse devra pourtant arriver plus tard, puisque α_1 peut grandir jusqu'à l'infini, tandis que $\beta + \gamma + \delta + \ldots$, ne peut diminuer jusqu'à la limite $b + c + d + \ldots$. La somme pourra donc toujours atteindre la grandeur donnée σ; mais il est clair qu'il n'y a qu'une seule manière de remplir la condition.

II. Dans le second cas (2) le cercle M lui-même satisfait, et si α_1 augmente au commencement moins rapidement que la somme $\beta + \gamma + \delta + \ldots$, ne diminue, l'on parvient en outre, comme ci-dessus (I), à un cercle M_1 dans lequel on a

$$\alpha_1 + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sigma.$$

III. Dans le troisième cas on obtient d'abord, en faisant croître le cercle M, un cercle M_3, dans lequel on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sigma,$$

car tous ces arcs, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, diminuent. Si en outre α_1 augmente au commencement moins rapidement que la somme $\beta + \gamma + \delta + \ldots$, ne diminue, de manière que la somme $\alpha_1 + \beta + \gamma + \ldots$, soit d'abord décroissante, il faut qu'il y ait un certain cercle M_m, dans lequel cette somme devient un minimum $= \sigma_1$, et au-delà duquel elle commence à croître indéfiniment, puisque l'arc α_1 n'a pas de limite. Donc, si σ_1 est plus petit que σ, il doit y avoir entre M et M_m un cercle M_2, dans lequel $\alpha_1 + \beta + \gamma + \ldots$, est égal à σ, et, le cercle augmentant continuellement, on trouvera encore, après avoir dépassé M_m, un cercle M_1 dans lequel on aura $\alpha_1 + \beta + \gamma + \ldots = \sigma$.

Les différents cercles que nous venons de signaler offrent les propriétés suivantes :

(*a*) Dans tous les cercles désignés par M_1, la somme des segments $a\alpha_1, b\beta, c\gamma, \ldots$, est un maximum; de même la somme $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$ est un maximum dans le cercle M_3.

(*b*) Dans le cercle M_2 la somme $a\alpha_1 + b\beta + c\gamma + \ldots$ est un minimum.

Si dans le cas III, σ_1 est égal à σ, les cercles M_2 et M_1 se confondent avec le cercle M_m, qui ne peut en conséquence offrir ni un minimum, ni un maximum.

Il reste à examiner lequel des deux maxima (III), qui ont lieu en même temps dans les cercles M_1 et M_3, est le plus grand ou le maximum principal.

Remarque. Le théorème précédent peut servir entre autres à résoudre le problème suivant :

Entourer un polygone convexe donné avec un fil flexible de longueur aussi donnée σ, de manière qu'il passe par tous les sommets des angles de ce polygone et qu'il comprenne un espace maximum.

A l'égard des figures sphériques, on peut énoncer le problème de la manière suivante :

Un certain nombre de points fixes étant donnés sur la limite d'un pays, et le périmètre étant aussi donné, déterminer les frontières de manière que l'aire comprise soit un maximum.

55. *Si l'on suppose que les figures du théorème précédent soient des segments de cercle et qu'ils puissent être indistinctement plus grands ou plus petits que le cercle entier, leur somme, les autres conditions restant les mêmes, est un maximum ou un minimum, aussi souvent que leurs arcs ont le même rayon.*

On verra aisément que le nombre de cas dans lesquels ces conditions peuvent être satisfaites est très grand, et même encore, quand on exclut les segments plus grands que le cercle, et que l'on peut seulement prendre le plus grand ou le plus petit segment correspondant à chaque corde. Pour reconnaître si certains cercles sont possibles ou non, on se servira de cercles auxiliaires, pareils au cercle M_m, employé dans le n° **54**, III; ces cercles, qui doivent avoir la propriété que la somme des arcs soutendus par les cordes données $a, b, c, \ldots$, soit un minimum, seront l'objet d'un problème préliminaire; toutefois, pour chacune des cordes, on dira d'avance si l'on aura à prendre le plus grand ou le plus petit arc. Il faudra rechercher leur propriété caractéristique, qui est la suivante pour un cas très particulier.

Soient les cordes données égales $a = b = c = \ldots$, *en nombre impair* $2n + 1$; *si on les inscrit à un cercle variable* M_m, *et que l'on ajoute les plus grands arcs* α_1 *de* n *cordes aux petits arcs* α *des autres* $n + 1$ *cordes, la somme totale* $n\alpha_1 + (n + 1)\alpha$ *est un minimum, quand elle est égale à la somme* $AD + BD$, *des tangentes* AD, BD *menées aux extrémités de l'une des cordes* a.

Un théorème analogue à celui du n° **52**, III, 2°, découle de cette propriété.

56. Les théorèmes **52** et **54** se prêtent à un grand nombre d'appli-

cations, que nous allons indiquer, les unes en peu de mots et les autres avec détail.

Nous remarquerons d'abord que, pour les parties de cercle les plus compliquées, on peut établir des théorèmes analogues à celui du n° **52**, qui ne se rapporte qu'à la partie de cercle la plus simple.

Nous allons énoncer ces théorèmes sommairement, sans les discuter un à un.

I. *La somme des aires de deux figures* F *et* F_1, *dont le périmètre de chacune est composé d'un certain nombre de lignes en partie données, et en parties arbitraires, comme dans les théorèmes depuis n° 21 jusqu'à n° 50, et dont la somme des périmètres est donnée, ne peut être un maximum que lorsque ces figures sont des parties de cercle à rayons égaux; ou si ces figures sont supposées être des parties de cercle, la somme de leurs aires est en général un maximum ou un minimum toutes les fois qu'elles appartiennent à des rayons égaux.*

Il est facile de vérifier cette assertion au moyen du théorème **52**, I. Pour que la somme $F + F_1$ devienne un maximum, ces figures doivent être d'abord des parties de cercle; elles contiendront donc des arcs L et L_1; puis si dans l'étendue de ces arcs on retranche de ces figures deux segments à angles aigus $a\alpha$ et $b\beta$, et que l'on suppose pour un moment que les cordes a et b et la somme des arcs $\alpha + \beta$ soient données, la somme des segments $a\alpha + b\beta$ doit être un maximum; donc les arcs α et β, et conséquemment aussi les arcs L et L_1, ont des rayons égaux.

II. *Si l'on exige que les figures* F *et* F_1, *dont la somme des périmètres est donnée, soient des parties de cercle seulement entre des angles circonscrits donnés (que par conséquent leurs périmètres ne contiennent pas de cordes données), la somme de leurs aires est un minimum, lorsqu'elles ont des rayons égaux.* Les deux maxima limites ont lieu quand l'une ou l'autre des figures devient nulle. On pourrait chercher lequel est le plus grand. Quand F et F_1 sont des parties de cercle dans un seul angle circonscrit, F dans A et F_1 dans B, ces limites sont isopérimètres, et alors F_1 est plus petit que F si l'on a $A > B$.

Ce même théorème (II) peut encore être considéré, quant aux figures planes, comme un cas particulier du suivant

III. *La somme des aires de deux figures* F *et* F_1 *qui sont données de forme, c'est-à-dire qui doivent être semblables à deux autres figures données* f *et* f_1, *et dont la somme des périmètres* $U + U_1$ *est donnée, est un minimum quand ces aires sont proportionnelles aux périmètres, c'est-à-dire quand* $F : F_1 = U : U_1$.

Le théorème du n° **54** sert à étendre ces propositions (I et II) à un nombre quelconque de parties de cercle arbitraires.

On déduira encore immédiatement des théorèmes **52** et **54** la série suivante de propositions, concernant des figures qui dépendent d'éléments fixes ou qui sont renfermées entre des limites fixes.

57. I. *Si le périmètre donné* U *d'une figure doit passer par les extrémités d'une droite donnée* $AB = a$ (*fig.* 15), *et si ce périmètre est plus petit que la circonférence du cercle, dont* a *est le diamètre, en sorte que* U *soit plus petit que* πa, *l'aire de la figure est un maximum lorsqu'elle est composée de deux segments de cercle égaux* $a\alpha$ *et* $b\beta$, *construits sur la corde* AB.

Si l'on a $U = \pi a$, ou $U > \pi a$, la condition que le périmètre passe par A et B, ne détermine plus la forme de la figure, qui est alors un cercle.

II. *Si le périmètre* U *est de longueur constante, tandis que la droite* a *augmente ou diminue, l'aire diminue ou augmente en même temps* (**33**). Si a a diminué jusqu'à ce qu'on ait $U = \pi a$, l'aire ne change plus, car la figure reste alors constamment un cercle.

58. I. Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés d'une droite G de longueur arbitraire et d'une ligne L de forme arbitraire, mais de longueur donnée, et qui doit passer par un point A placé de manière que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite G soit égale à une longueur donnée p, si L est plus petit que $p\pi$; entre toutes ces figures, dis-je, la figure maximum est celle dans laquelle la ligne L est composée de deux arcs de cercle égaux α et β qui ont leurs centres sur G (**57**, I). — Si l'on a au contraire $L = p\pi$, ou $L > p\pi$, la figure est toujours un demi-cercle dont L est la demi-circonférence et G le diamètre.

II. L'aire d'une figure dont le périmètre se compose d'une droite donnée et fixe AB, d'une autre droite fixe G, mais de longueur arbitraire et de deux lignes quelconques α et β, dont la somme σ est donnée, et

qui joignent les deux extrémités de la droite AB à des points quelconques de la droite G, cette aire ne peut être un maximum que lorsque la droite G est normale aux arcs α et β qui sont des arcs de cercle à rayons égaux.

Si un angle fixe GH est donné au lieu de la droite G, et si la droite fixe AB est comprise dans l'espace de cet angle, α et β doivent être respectivement normales à ses côtés G et H, et avoir des rayons égaux.

III. Si l'on exige que le périmètre d'une figure soit composé d'une droite fixe G de longueur arbitraire et d'une ligne L donnée de longueur seulement, et que cette ligne L passe par un certain nombre de points donnés A, B, C,..., qui sont tous placés du même côté de la droite G, cette figure ne peut être un maximum que lorsque toutes les parties de la ligne L, soit qu'elles joignent deux points fixes consécutifs, soit qu'elles joignent le premier et le dernier point fixe aux extrémités de la droite G, sont des arcs de cercle à rayons égaux (**54**), et lorsque ces dernières deux parties tombent normalement sur la droite G (I).

Il existe un théorème analogue pour le cas où un angle GH est donné au lieu de la droite fixe G, etc.

59. *Si le périmètre* L *de longueur donnée* (fig. 16) *doit passer par un point* A *et se terminer à une ligne* G, *donnée de position, et si l'on a* $L < \pi a$, *où nous désignons par* a *la perpendiculaire* AB *abaissée de* A *sur* G, *l'aire de la figure renfermée est un maximum, lorsque* L *est composé de deux arcs de cercle à rayons égaux* α *et* β, *qui ont la droite* AB *pour corde commune et qui par conséquent coupent sous des angles égaux la droite* G. — *Si l'on a* $L = \pi a$ ou $L > \pi a$, *la figure en question est toujours un cercle* ACD, *tangent à la droite* G.

60. *Soient données de position deux droites parallèles* G *et* H (fig. 17), *dont la distance perpendiculaire est égale à* a; *soit en outre donnée la longueur* L *du périmètre d'une figure, lequel doit être tracé de manière à atteindre aux deux droites sans les dépasser, et peut avoir de commun avec chacune d'elles ou un seul point ou une partie quelconque de sa longueur; l'aire de la figure renfermée est, selon les différentes longueurs du périmètre donné, un maximum quand elle a les formes suivantes:*

1°. *Si l'on a* $L = \pi a$: *le cercle* $\gamma\gamma$, *tangent à* G *et* H, *dont* a *est le diamètre, est un maximum;*

2°. *Si l'on a* $L < \pi a$: *le périmètre de la figure maximum est composé de deux arcs de cercle égaux* α *et* β, *qui ont la perpendiculaire* $AB = a$ *pour corde commune, et qui coupent les droites* G *et* H *sous des angles égaux ;*

3°. *Si l'on a* $L > \pi a$: *le maximum est limité par deux demi-cercles* α_1 *et* β_1, *tangents à* G *et* H, *c'est-à-dire appartenant au diamètre* a, *et par les deux droites* CD *et* EF, *parties égales de* G *et* H.

61. *Si le périmètre d'une figure est composé d'une droite* AB *d'une longueur donnée* 2b *et de position fixe* (fig. 18), *et d'une ligne quelconque* L, *donnée de longueur seulement ; si l'on exige en outre que la ligne* L *ne dépasse jamais une droite* G, *parallèle à la droite* AB *à la distance* a, *mais que toujours elle y atteigne en un point ou qu'elle ait une certaine partie commune avec cette droite ; la figure ainsi formée, pour être un maximum, devra prendre des formes différentes selon les différentes longueurs de la ligne* L, *savoir :*

1°. *Pour la plus petite valeur de* L, *que nous désignons par* 2c, L *se compose de deux droites égales* AC *et* BC, *et la figure est un triangle isoscèle* ACB, *limite des figures en question ;*

2°. *Pour une certaine longueur* γ, L *se change en un arc de cercle* ACB, *auquel la droite* G *est tangente en* C ; *la figure est un segment de cercle* $A\gamma C\gamma B$;

3°. *Pour une certaine longueur* $2b + \pi a$, L *se compose de deux demi-cercles égaux* δ *et* ε *et de la partie* DE, *qui lui est commune avec la droite* G ; *ces demi-cercles sont tangents à la ligne* G *en* D *et en* E, *et leurs diamètres, qui sont de longueur* a, *sont perpendiculaires aux deux droites données ; la figure maximum est donc composée dans ce cas d'un rectangle* ADEB *et des deux demi-cercles* $A\delta D$ *et* $B\varepsilon E$.

Dans les longueurs intermédiaires et au-delà de la plus grande, la figure se transforme de la manière suivante :

4°. *Si l'on a* $\gamma > L > 2c$, *la ligne arbitraire* L *est composée de deux arcs de cercle égaux* α *et* β, *qui coupent la droite* G *dans le même point connu* C *et sous des angles égaux ;*

5°. *Si l'on a* $\gamma < L < 2b + \pi a$, *elle se compose de deux arcs de cercle égaux* α_1 *et* β_1, *tangents à la droite* G *en* A_1 *et* B_1, *et d'une droite* A_1B_1, *dont le milieu est sur le point fixe* C ;

6°. *Si* $L > 2b + \pi a$, *la ligne* L *est composée de deux arcs de cercle* α_2 *et* β_2 *de même rayon et de la droite* $A_2 B_2$, *qui est de longueur constante* 2b, *mais variable de position; les deux arcs sont tangents à la droite* G *en* A_2 *et* B_2 *et forment ensemble un cercle entier; le plus grand des arcs peut indifféremment être placé en* A *ou en* B.

Dans tous ces cas il est bien facile de déterminer les aires au moyen des valeurs données de a, b et L; dans le dernier cas, par exemple, l'aire de la figure est égale à

$$2ab + \frac{(L - 2b)^2}{4\pi}.$$

II. *Si la droite* G *a une position fixe quelconque (on suppose qu'elle ne passe pas entre les extrémités de la droite* AB), *si par exemple elle est plus éloignée de* B *que de* A (fig. 19), *la ligne* L *prend les différentes formes suivantes pour que la figure renfermée soit un maximum dans chaque cas.*

Pour sa limite minimum la ligne L *est composée de deux droites* AC *et* BC *qui coupent la droite* G *dans le même point* C *et sous des angles égaux et dont la somme est moindre que la somme des deux droites qui joignent tout autre point de la droite* G *avec les points* A *et* B; *quand on a* $L > AC + BC$, *elle est formée par deux arcs de cercle* α *et* β *de même rayon* r, *qui coupent la droite* G *dans le même point* D (*placé entre* C *et* E) *et sous le même angle* φ; *si* L *continue de croître, le point* D *se meut de* C *vers* E, *tandis que le rayon* r *et l'angle* φ *diminuent; quand la ligne* L *a atteint une certaine longueur* ε, *elle n'est plus qu'un seul arc de cercle* $A\varepsilon E\varepsilon B$, *tangent en* E *à la droite* G *et l'angle* φ *est nul;* φ *reste nul pendant l'accroissement ultérieur de* L, *et dès-lors la ligne* L *est composée de deux arcs de cercle* α_1 *et* β_1 *de même rayon* r, *qui sont tangents à la droite* G *en* A_1 *et* B_1, *et de la droite* $A_1 B_1$; *ces deux points* A_1 *et* B_1 *s'éloignent d'abord du point* E, *en s'approchant respectivement des points* C *et* F, *tandis que le rayon* r *décroît; chacun des arcs* α_1 *et* β_1 *est plus petit que la demi-circonférence; enfin on arrive au point où l'arc* β_1 *devient une demi-circonférence, décrite sur le diamètre* BF, *qui est la perpendiculaire abaissée du point* B *sur la droite* G; *là le rayon* r *est un mini-*

mum, le point B_1 *tombe en* F *et le point* A_1 *atteint sa distance maximum au point* E *dans la direction* EC; *si* L *continue de croître, l'arc* β_1 *devient de plus en plus grand et* α_1 *de plus en plus petit par rapport à la demi circonférence correspondante, le point* A_1 *marche dès lors dans le même sens que* B_1, *et le rayon* r *et la partie droite* A_1B_1 *croissent indéfiniment.*

62. *Si l'on doit construire une figure* F *de périmètre donné sous la condition qu'elle ait avec chacun des côtés d'un polygone donné* P, *ou un point commun ou une partie commune; pour que l'aire de la figure inscrite soit un maximum, il faut que toutes les parties de son périmètre, qui joignent deux côtés consécutifs du polygone* P, *soient des arcs de cercle égaux, et que les deux arcs qui coupent un même côté du polygone* P *forment avec lui des angles égaux qui seront nuls, quand le côté respectif a une certaine partie commune avec le périmètre de la figure* F, *ou quand les deux arcs ont le même centre* (**61**, II).

La considération des limites de la figure F nous conduit à quelques résultats intéressants que nous allons discuter.

63. I. Quand on fait varier le périmètre de la figure F inscrite, tandis que le polygone P reste le même, il est difficile de déterminer d'une manière générale les limites de ce périmètre et la forme correspondante de la figure F, principalement si l'on admet que P puisse être un polygone quelconque. La difficulté reste la même quand on ne désigne par P que des polygones convexes, et quand on suppose en même temps que la figure F soit comprise dans leurs espaces intérieurs; car il y a des cas où cette condition est contraire à la nature du problème. On sait bien que le périmètre de la figure F aura alors une limite supérieure, qui est le périmètre du polygone P lui-même; mais la forme de sa limite inférieure, du minimum du périmètre de F, dépend des propriétés du polygone P. Il y a pourtant certains cas dans lesquels la figure se transforme à cette limite en un polygone rectiligne F_1 inscrit au polygone P, et du même nombre de côtés. Les côtés du polygone F_1 peuvent considérés comme des arcs de cercle d'un rayon infini, et chacun des côtés du polygone P doit former des angles égaux avec les deux côtés du polygone F_1 qui le coupent. C'est en conséquence de cette propriété que *le périmètre du polygone* F_1 *est un minimum entre ceux de tous les polygones inscrits au polygone donné* P (ou, comme on le

verra dans la suite, qu'il est du moins un des polygones à périmètre minimum). Il reste à voir si réciproquement un polygone inscrit F_1, qui remplit la condition que ses angles extérieurs soient divisés en deux parties égales par les côtés du polygone P, peut toujours être considéré comme limite de la figure F. Pour cela, il faut savoir s'il est toujours possible d'inscrire à chaque polygone P donné un autre polygone F_1 qui ait cette propriété; ou bien si le polygone P doit répondre à certaines conditions pour que cela soit possible; et enfin, quand F_1 est inscriptible, s'il présente vraiment la limite de la figure F.

On se convaincra facilement que, dans certains cas, le polygone F_1 doué des propriétés exigées, existe; car on n'a qu'à le supposer donné, et l'on aura de suite le polygone correspondant P, puisque les droites qui partagent les angles extérieurs du polygone F_1 en deux parties égales sont les côtés du polygone P.

On répond à toutes ces questions au moyen des considérations suivantes.

II. Supposons que le polygone F_1 soit inscrit au polygone P comme on l'exige; désignons les angles consécutifs de celui-ci par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, et les angles du polygone F_1 par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, en nommant a_1 l'angle dont le sommet est sur le côté A_1A_2, a_2 celui qui est sur le côté A_2A_3, etc. On aura alors

$$(A)\quad \begin{cases} 2A_1 = a_m + a_1, \\ 2A_2 = a_1 + a_2, \\ 2A_3 = a_2 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2A_m = a_{m-1} + a_m. \end{cases}$$

On tire de ces équations les conséquences suivantes :

1°. *Si le nombre* m *des côtés des polygones est impair et* $= 2n + 1$, *les angles du polygone* F_1 *sont immédiatement déterminés par les angles du polygone donné* P; *car chacun des angles de* F_1 *est égal à la différence entre la somme des angles à indice impair et la somme des angles à indice pair du polygone* P, *en comptant chaque fois les angles de manière que des deux angles de* P *voisins de l'angle cherché,*

l'un soit le premier, l'autre le dernier; en sorte que l'on a, par exemple,

$$(B) \quad a_m = (A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n+1}) - (A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}).$$

2°. *Si au contraire le nombre des côtés est pair, si l'on a* $m = 2n$, *les angles du polygone* F_1 *ne sont pas déterminés comme dans le premier cas; mais ceux du polygone* P *sont assujétis à une certaine condition, de manière que celui-ci ne peut être un polygone quelconque. Cette condition consiste en ce que la somme des angles pairs doit être égale à celle des angles impairs; on aura donc*

$$(C) \quad A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n-1} = A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}.$$

Dans le premier cas (1°) le polygone F_1 est toujours possible et absolument déterminé, sans que le polygone P soit assujéti à aucune condition; mais, vu la restriction *ci-dessus* (I), il cesse de représenter la limite de la figure F_1 dès qu'un de ses angles devient négatif, ce qui peut facilement arriver, comme on le voit par la forme de l'équation (B).

Mais dans le second cas (2°), si les angles de P remplissent la condition (C), le polygone F_1 n'est pas encore entièrement déterminé, car une infinité de polygones f_1 restent possibles, lesquels sont tous inscrits au polygone P sous la condition donnée et avec un périmètre minimum, c'est-à-dire qu'ils ont tous des périmètres égaux et plus petits que ceux de tout autre polygone inscrit au polygone P. Parmi tous ces polygones f_1 se trouvera aussi le polygone F_1, limite de la figure F, et ce ne peut être que celui d'entre eux dont l'aire est un maximum.

Les raisonnements suivants serviront à faire voir comment on trouvera le polygone F_1 dans les deux cas, ou les polygones f_1 dans le dernier cas, en même temps qu'ils montreront leurs propriétés d'un nouveau point de vue.

III. A. Soit donné un polygone P d'un nombre impair $2n + 1$ de côtés. D'un point quelconque a, pris sur le premier côté $A_1 A_2$, faisons partir un rayon de lumière sous un angle arbitraire α; supposons qu'il subisse sur le second côté ou une reflexion ou une

réfraction telle que le rayon réfracté se propage suivant la même droite que le rayon réfléchi, mais en sens contraire; la même chose se reproduira sur le troisième, sur le quatrième côté, etc., jusqu'à ce que le rayon soit enfin rejeté du dernier côté sur un point b du premier, avec lequel il formera l'angle β. Prenons maintenant ce point b pour point de départ, le rayon sera encore réfléchi ou réfracté dans le point b même, ensuite sur tous les autres côtés, et il reviendra pour la seconde fois sur le côté A_1A_2, qu'il rencontrera dans le point c, et sous un angle γ. Alors les relations suivantes ont lieu :

1°. *On a toujours* $\gamma = \alpha$;

2°. *Si le point de départ* a *change arbitrairement de position sur le côté* A_1A_2, *tandis que l'angle* α *reste constant, la droite* ac *et le chemin parcouru ne changent pas de longueur; pour cela il faut qu'on prenne toutes les parties du chemin avec le signe* $+$, *si le rayon a été réfléchi sur tous les côtés; mais s'il a aussi été réfracté, on donnera des signes contraires aux parties du chemin parcourues avant et après la réfraction: les parties du chemin doivent donc changer de signe après chaque réfraction.*

3°. *Pour chaque angle donné* α, *il y a une position du point de départ* a, *telle que le point* b *coïncide avec lui; et, réciproquement pour chaque position du point* a, *on peut déterminer l'angle* α, *de manière que le point* b *tombe en* a.

4°. *Il existe toujours une seule grandeur de l'angle* α, *pour laquelle on a* $ac = 0$, *c'est-à-dire pour laquelle le point de retour* c *coïncide avec le point de départ* a, *quelle que soit la position de celui-ci sur la droite* A_1A_2; *le chemin du rayon est alors un polygone* f_2 *de* $4n + 2$ *côtés inscrit au polygone* P, *de manière qu'il y fasse deux tours et qu'il y ait deux sommets d'angles sur chacun des côtés de celui-ci. Dans ce cas l'angle* β *est égal à* α; *le rayon retourne donc après le premier circuit sous le même angle, sur le premier côté sous lequel il en est parti; les côtés de chacun des polygones* f_2 *sont donc parallèles deux à deux. Le périmètre du polygone* f_2 *est constant, si l'on a égard au sens du rayon* (2°). *Les sommets des angles* a *et* b *sont toujours également éloignés d'un point fixe* m *sur le côté* A_1A_2, *de sorte qu'on a toujours* $am = bm$, *et la même chose a lieu sur tous les côtés du po-*

lygone P; *donc si l'on met* a *en* m, b *y tombe aussi; le rayon revient donc sur son chemin après n'avoir décrit qu'un seul tour qui est le polygone* F_1 *de* $2n + 1$ *côtés; on peut donc considérer le double de celui-ci comme un des polygones désignés par* f_2 : *ce polygone spécial est justement le polygone* F_1 *dont nous avons parlé ci-dessus* (II); *le double de son aire est en même temps un maximum entre les aires des polygones* f_2.

B. Soit donné un polygone P d'un nombre pair $2n$ de côtés. Supposons que d'un point a, pris sur le premier côté A_1A_2, parte un rayon de lumière sous un angle arbitraire α, qu'il se meuve comme ci-dessus, et qu'après un premier tour il retombe sous un angle β sur un point b du même côté A_1A_2, etc. Alors ont lieu les lois suivantes :

1°. *On a toujours*

$$\alpha - \beta = (A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n-1}) - (A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}) = u.$$

2°. *Si la différence* u *est commensurable avec* π, *le rayon de lumière retournera sur le premier côté après un certain nombre de tours sous le même angle qu'il en était parti au commencement; s'il y arrive donc dans le point* t *et sous l'angle* τ, *on aura* $\tau = \alpha$; *si* α *reste constant tandis que le point* a *change de position, le chemin du rayon et la droite* at *restent aussi constants, etc.*

3°. *Soit* $u = 0$, *c'est-à-dire soit la somme des angles pairs du polygone* P *égale à la somme de ses angles impairs; alors on a* $\beta = \alpha$, *c'est-à-dire que le rayon revient déjà après un seul tour rencontrer le premier côté sous le même angle sous lequel il est parti. Si le point* a *change de position, sans que la grandeur de l'angle* α *varie, le chemin du rayon et la distance des deux points* a *et* b *restent constants. Quelle que soit la position du point* a, *il y a toujours un angle correspondant* α, *qui fait que* b *tombe sur* a; *le rayon décrit donc toujours un polygone* f_1 *du même nombre de côtés et du même périmètre, qui est inscrit au polygone donné* P : *parmi ces polygones* f_1 *qu'on peut obtenir ainsi, se trouve celui que nous avons désigné ci-dessus* (II) *par* F_1 *et qui est la limite de la figure* F; *c'est celui d'entre eux dont l'aire est un maximum et qui jouit en même temps de la propriété que*

LA SOMME DE SES CÔTÉS PAIRS EST ÉGALE A LA SOMME DES CÔTÉS IMPAIRS; *par-là le polygone* F_1 *est parfaitement déterminé.*

C. Remarquons d'abord que le premier théorème (A), qui se rapporte aux polygones à nombre de côtés impair, peut être considéré comme un cas spécial du second théorème (B, 3°); car puisqu'on est obligé de faire deux tours dans ces polygones (A), cela revient parfaitement au même que si le polygone P était du nombre double $4n + 2$ de côtés et qu'on ne fît qu'un seul tour; on satisferait toujours à la condition $u = 0$. La construction suivante est donc indistinctement applicable aux polygones f_1 et f_2; elle découle des propriétés suivantes :

1°. Les côtés homologues des polygones f_1 sont parallèles entre eux (à cause de l'angle constant α);

2°. Quand la position d'un quelconque des côtés est donnée, celle des autres côtés se trouve aussi déterminée : donc le polygone entier est connu dans ce cas;

3°. Le premier côté $a_1 a_2$ de l'un des polygones f_1, dont les deux extrémités a_1 et a_2 se trouvent sur les premiers deux côtés A_1A_2 et A_2A_3 du polygone P, peut passer par un point quelconque donné p_1 : on trouvera ce côté de la manière suivante :

« Du point donné p_1 on abaissera une perpendiculaire p_1q_1 sur le » second côté A_2A_3 du polygone P, et on prendra sur son prolonge- » ment un point p_2 tel que l'on ait $p_2q_1 = p_1q_1$; du point p_2 on abais- » sera de même une perpendiculaire p_2q_2 sur le troisième côté A_3A_4, » et on prendra sur son prolongement le point p_3 tel que $p_3q_2 = p_2q_2$; » on répétera la même opération sur tous les côtés du polygone P, » jusqu'à ce que l'on parvienne au point p_{m+1} moyennant la perpen- » diculaire abaissée du point p_m sur le premier côté A_1A_2; ce point » (p_{m+1}) se trouve sur le côté demandé a_1a_2 ou sur son prolongement : » ce côté est donc parfaitement déterminé par la position connue des » deux points p_1 et p_{m+1}. »

On construira donc dans les deux cas, d'abord un quelconque des polygones f_1 ou f_2, et l'on en déduira facilement le polygone spécial F_1.

Il y a encore une autre construction qui s'applique seulement aux polygones f_2 d'un nombre de côtés impair, car dans ceux-ci on peut

trouver immédiatement l'angle α au moyen des angles du polygone donné P (II, 1°).

64. Il ne sera pas inutile de considérer encore les cas spéciaux suivants.

I. Si le polygone donné P (**63**, III, B, 3°) est un quadrilatère ABCD, il faut qu'il soit inscriptible à un cercle (parce qu'on a $A + C = B + D$). On trouvera les quadrilatères inscrits f_1 de périmètre minimum au moyen d'un autre procédé plus simple que le précédent; on construira d'abord le quadrilatère spécial F_1, limite de la figure F, et qui a l'aire maximum de la manière suivante :

« Dans le quadrilatère ABCD tirez les diagonales AC et BD; de leur » point d'intersection E abaissez sur les côtés du quadrilatère les per- » pendiculaires Ea, Eb, Ec et Ed; les points a, b, c, d sont les sommets » des angles du quadrilatère cherché F_1. »

Le quadrilatère $abcd$ ou F_1 est *circonscriptible à un cercle qui a son centre en* E.

Pour obtenir les autres quadrilatères f_1 ou $a_1b_1c_1d_1$, on prend un point arbitraire a_1 et l'on fait les côtés a_1b_1, b_1c_1, etc., parallèles aux côtés homologues ab, bc, etc., du quadrilatère $abcd$.

II. Si le polygone donné P (n° **62**) est un triangle ABC, et si la figure inscrite F doit être comprise dans son espace intérieur, le périmètre L de la figure F aura les formes et les limites suivantes :

1°. *Pour une certaine longueur* a *de* L, *la figure est le cercle inscrit au triangle;*

2°. *Si l'on a* $L > a$, *ce périmètre est composé de trois parties des côtés du triangle et de trois arcs de cercle du même rayon, dont chacun a pour tangentes deux côtés du triangle;*

3°. *Si l'on a* $L < a$, *le périmètre est composé de trois arcs de cercle de rayons égaux, qui forment un triangle curviligne* $\alpha\beta\gamma$, *inscrit au triangle* ABC; *chacun des côtés de celui-ci est coupé sous des angles égaux par les deux côtés adjacents du triangle inscrit; les droites qui partagent les trois angles du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *en deux parties égales, se rencontrent en un seul point* D. *Si le triangle donné* ABC *est à angles aigus, la limite inférieure de* $\alpha\beta\gamma$ *ou* F, *que nous avons désignée par*

F_1 (**63**), *est le triangle rectiligne* abc, *que l'on obtient en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle* ABC *sur les côtés opposés. Le triangle* abc *a donc le périmètre minimum entre tous les triangles inscrits au triangle donné* ABC; *les droites qui partagent ses angles en deux parties égales, sont en même temps ces perpendiculaires desquelles nous venons de parler et qui se coupent en* D; *ses angles extérieurs sont partagés en deux moitiés par les côtés du triangle* ABC.

Remarque. Ces théorèmes se rapportent également aux triangles plans et sphériques. Mais ce serait l'objet d'une recherche particulière de voir si les théorèmes concernant le quadrilatère ABCD (I) et les polygones P, f_1 et f_2 (**63**) peuvent aussi être transportés aux figures sphériques ou s'il faudra y apporter certaines modifications; car il est clair qu'un polygone F_1 à périmètre minimum et qui est la limite de la figure F, existe aussi sur la sphère, et que l'on obtiendra le polygone P par la construction donnée ci-dessus (**63**, I) si le polygone F_1 est donné.

65. Jusqu'ici nous avons supposé que tous les côtés du polygone P soient des droites données; mais on pourrait employer de même un polygone curviligne ou une courbe quelconque P_1. Le théorème paraît alors être plus général, mais pourtant il n'est qu'une conséquence du théorème précédent; c'est pourquoi les propriétés principales de la figure F restent les mêmes.

Pour que la figure F soit donc un maximum, les conditions suivantes doivent être remplies; il faut:

1) *Que toutes les parties du périmètre qui joignent des côtés courbes consécutifs de* P_1 *soient des arcs de cercle égaux;*

2) *Que les deux arcs qui rencontrent un même côté de* P_1, *le coupent dans le même point et sous des angles égaux, ou qu'ils lui soient tangents en deux points différents.*

Ce théorème ne s'applique pas seulement aux figures situées dans un plan ou sur une sphère, mais il a lieu quelle que soit la surface courbe sur laquelle elle se trouve [*].

---

[*] J'ai déjà fait connaître ce théorème dans une autre occasion. Voyez les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Berlin, avril 1839; et le journal *l'Institut*, année 1839.

Voici l'énoncé de ce théorème général :

« *Un nombre arbitraire de courbes ou un polygone curviligne* P_1 *étant* » *donné sur une surface courbe* S *quelconque, on doit lui inscrire une* » *figure* F *de périmètre donné, qui ait avec chacun des côtés de* P_1, » *ou un point ou une partie commune, et dont l'aire soit un maxi-* » *mum; elle aura les propriétés caractéristiques suivantes :*

» 1°. *Si l'on mène la surface développable, tangente à la surface* S, » *suivant une de ces parties du périmètre de la figure* F, *qui joignent* » *deux côtés consécutifs de* P_1, *et si on la développe ensuite, il faut* » *que cette partie donne un arc de cercle;*

» 2°. *Tous les arcs de cercle que l'on obtient de cette manière seront* » *de même rayon;*

» 3°. *Enfin, les deux lignes qui font partie du périmètre de* F, *et* » *qui rencontrent un même côté de* P_1, *doivent, ou le couper dans le* » *même point et sous des angles égaux, ou lui être tangents en deux* » *points différents.* »

66. La figure F pourra toujours se transformer à sa limite en un polygone F_1, dont les côtés sont les lignes les *plus courtes* sur la surface S et qui donnent des *droites* par le développement; le périmètre de ce polygone F_1 est en même temps un maximum ou un minimum entre ceux de tous les polygones que l'on peut inscrire au polygone P_1 avec les lignes les plus courtes. Il paraît même qu'en général, si réciproquement le périmètre d'un polygone F_1, inscrit au polygone P_1 avec les lignes les plus courtes, est un maximum ou un minimum, ce polygone est la limite de la figure F. Mais le cas spécial suivant fait en quelque sorte une exception à cette règle.

Si l'on désigne par P_1 un système de m courbes ou un polygone curviligne de m côtés, situé dans un plan, F_1 sera un polygone rectiligne. Mettons dans les sommets de tous les angles de F_1 des tangentes à ces courbes; elles formeront un polygone P, qui sera avec le polygone F_1 dans la relation du n° **63**. Car le polygone F_1 est aussi la limite de la figure F inscrite à ce polygone P; donc son périmètre est un minimum entre ceux de tous les polygones inscrits à P; ses angles extérieurs sont divisés en deux parties égales

par les côtés de P; et enfin si le nombre des côtés est pair, si l'on a $m = 2n$, la somme des angles à indices pairs du polygone P doit être égale à la somme de ses angles à indices impairs. Dans ce cas, la somme des côtés à indices pairs du polygone F_1 doit aussi être égale à la somme de ses côtés à indices impairs (**63**, III, B, 3°). Donc un polygone f_1 à périmètre minimum, inscrit au polygone courbe P_1 de $2n$ côtés, n'est pas nécessairement la limite de la figure F; pour cela il faut encore que la somme de ses côtés pairs soit égale à la somme des côtés impairs.

Cette exception n'a pas lieu si m est impair, si l'on a $m = 2n + 1$; pour ce cas nous avons le théorème spécial suivant :

Si les sommets des angles d'un triangle abc (ou F_1) *sont respectivement sur trois courbes données* A, B, C (*ou* P_1), *il faut, pour que son périmètre soit un maximum ou un minimum, que les normales à ces courbes, menées par les sommets des trois angles du triangle, divisent ces angles en deux parties égales; elles se rencontreront donc en un seul point; ou bien la normale dans chaque sommet doit rencontrer en un même point les tangentes dans les autres sommets.*

Ce théorème s'applique à la sphère d'une manière analogue.

67. On peut encore varier de plusieurs manières les données pour les figures comprises dans un plan. Par exemple, soit donnée une seule courbe P_1, au lieu des m courbes du cas précédent; on demande quelle est la figure F, ou quel est le polygone rectiligne f_1, inscriptible sous les mêmes conditions. On aura alors le théorème suivant, relatif au polygone f_1 :

Entre tous les polygones rectilignes de m *côtés, qui peuvent être inscrits à une courbe donnée* P_1, *celui seulement dont les angles sont divisés en deux parties égales par les normales de la courbe, peut avoir un périmètre maximum ou minimum.* — En particulier on pourra s'exercer sur le problème suivant : P_1 *étant une ellipse donnée, trouver le polygone* f_1, *dont le périmètre est un maximum?*

68. Le maximum ou le minimum d'aire d'un polygone rectiligne p inscrit au polygone curviligne P_1 est assujéti à la condition suivante :

Pour que l'aire d'un polygone rectiligne p *de* m *côtés, qui est inscrit à un polygone donné curviligne de* m *côtés ou à une seule courbe* P_1,

soit un maximum ou un minimum, il faut que la tangente, en chacun des sommets, soit parallèle à la diagonale qui joint les angles voisins.

Il y a un théorème analogue pour les mêmes figures, tracées sur la sphère.

On sait que la courbe donnée P_1 étant une ellipse, il y a une infinité de polygones p qui satisfont à la condition, et qui ont donc tous une même aire maxima.

Remarque. On pourra s'exercer à chercher les conditions que les polygones *circonscrits* au polygone curviligne donné doivent remplir pour avoir une aire ou un périmètre maximum ou minimum.

ESSAI

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES,

A UNE OU PLUSIEURS INCONNUES ET DE FORME QUELCONQUE;

PAR F. SARRUS,

Doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg.

La résolution des équations à plusieurs inconnues a reposé jusqu'à ce jour sur différents procédés d'élimination. Mais d'un côté ces procédés conduisent à des calculs d'une longueur presque toujours rebutante; d'un autre côté ils cessent d'être applicables même en théorie lorsque les équations à résoudre renferment des fonctions transcendantes. Frappé de ces inconvénients, je me suis proposé de résoudre sans élimination, sans recherche de plus grand commun diviseur, cette question générale :

Étant donné une ou plusieurs équations à un nombre quelconque d'inconnues, trouver toutes les solutions de ces équations qui peuvent être comprises entre des limites données quelconques. Trouver en outre le degré de multiplicité de chacune de ces solutions.

Après de longues tentatives, que des succès partiels venaient encourager, je suis enfin parvenu à trouver les moyens d'*approcher indéfiniment du but que je m'étais proposé.* C'est-à-dire que je donne des moyens faciles d'exclure tous les nombres qui, pris pour valeurs de x, y, z, ..., *ne satisferaient point aux équations proposées avec un degré donné d'approximation.* Les nombres restants contiendront toutes les solutions effectives des équations données; malheureusement ils pourront contenir aussi des valeurs étrangères qui satisferaient à très peu près à ces mêmes équations. Quoi qu'il en soit, mon travail actuel me

paraît un pas considérable vers la résolution complète des équations numériques.

Je terminerai ce court préambule en ajoutant que les principes développés dans les deux premiers chapitres de ce Mémoire, peuvent servir encore à trouver la limite des erreurs que l'on peut commettre par l'emploi de la formule de Maclaurin, de celle de Taylor, des méthodes d'interpolation appliquées à la recherche des quadratures; et qu'enfin ils peuvent servir aussi à résoudre, dans le plus grand nombre de cas, les équations différentielles d'un ordre et d'un degré quelconques à une ou plusieurs inconnues. Cette application formera le sujet d'un autre Mémoire.

CHAPITRE PREMIER.

Préliminaires.

I.

1. Nous désignerons par L, M, N,..., des fonctions quelconques de x, y, z,...; par x', y', z',..., des valeurs quelconques respectivement moindres que x, y, z,...; et par x'', y'', z'',..., d'autres quantités respectivement plus grandes.

2. Nous supposerons que dans toute l'étendue des limites x', y', z',..., et x'', y'', z'',..., les valeurs de L, M, N,..., restent finies et continues. Nous ferons abstraction des autres valeurs de ces fonctions.

3. Nous désignerons par L′ et L″ deux nouvelles quantités auxiliaires qui soient telles que,

Dans toute l'étendue des limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., les valeurs de L soient plus grandes que L′ et moindres que L″; et que de plus,

En faisant varier les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., de manière que les différences positives $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$,..., $x''-x$, $y''-y$, $z''-z$,..., décroissent indéfiniment, les différences également positives

$L - L'$, $L'' - L$, finissent par devenir moindres que toute quantité donnée.

4. Nous désignerons de même par M', N',..., M'', N'',..., des quantités qui soient par rapport aux valeurs de M, N,..., ce que L' et L'' sont par rapport à celles de L.

5. Nous donnerons aux quantités auxiliaires L', M', N',... le nom de *limites inférieures* des valeurs de L, M, N,..., et aux quantités L'', M'', N'',... celui de *limites supérieures* des mêmes valeurs.

6. Avant d'indiquer les moyens de trouver les valeurs de ces limites inférieures et supérieures, nous croyons devoir exposer celles de leurs propriétés dont nous nous servirons pour la résolution des équations.

II.

7. Lorsque la limite inférieure des valeurs d'une fonction sera positive, ces valeurs seront aussi, et à plus forte raison, positives, et par conséquent aucune d'elles ne pourra être nulle.

8. Lorsque la limite supérieure des valeurs d'une fonction sera négative, ces différentes valeurs seront aussi, et à plus forte raison, négatives, et par conséquent aucune d'elles ne sera nulle.

9. Réciproquement, si les limites x', y', z',..., et x'', y'', z'',..., sont suffisamment rapprochées, et si néanmoins aucune des valeurs d'une fonction calculées dans l'étendue de ces limites n'est égale à zéro, il arrivera :

Ou que la limite inférieure des valeurs de cette fonction sera positive, ou bien que la limite supérieure sera négative.

Pour le prouver, supposons que L se rapporte à un système de valeurs particulières et invariables de x, y, z,...; alors L sera une quantité fixe et différente de zéro.

Supposons en second lieu que les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., se rapprochent indéfiniment des valeurs de x, y, z,..., dont nous venons de parler; alors les différences positives $L - L'$, $L'' - L$, finiront par devenir moindres que la valeur absolue de L (art. **3**).

D'ailleurs nous avons identiquement

$$L' = L - (L - L'), \quad L'' = L + (L'' - L),$$

nous pouvons donc conclure que les valeurs de L′ et de L″ finiront par devenir de même signe que L, et que par suite elles seront ou toutes les deux positives, ou bien toutes les deux négatives.

Si donc L′ n'est pas positive, L″ sera négative.

10 Il résulte de ce qui précède que,

Si la limite inférieure des valeurs d'une fonction est négative, et si la limite supérieure est en même temps positive, il faut, ou que cette fonction devienne nulle, en prenant des valeurs convenables de x, y, z,..., comprises entre les limites x', y', z',... et x'', y'', z'',..., ou bien que ces limites soient trop écartées.

Ces préliminaires renfermant tout ce qui peut nous être utile pour la résolution des équations numériques, nous allons passer à la recherche des limites des valeurs des fonctions.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Recherches des limites des valeurs des fonctions.

I.

11. Nous avons maintenant à résoudre cette question générale :

Étant donné une fonction quelconque $L = f(x, y, z,...)$, trouver les limites inférieure et supérieure des valeurs qu'elle peut avoir quand on fait varier x, y, z,..., dans l'étendue de leurs limites x', y', z',..., et x'', y'', z'',....

Nous allons nous en occuper en commençant par les cas les plus simples.

12. Toutes les fois que l'on saura trouver la plus petite et la plus grande des valeurs de L qui peuvent avoir lieu dans l'étendue des limites des valeurs x, y, z,..., on pourra prendre la plus petite de ces valeurs comme la limite inférieure de toutes les autres, et la plus grande pour leur limite supérieure.

Et en effet, il est d'abord visible que toutes les valeurs de L seront plus grandes que la première et moindres que la seconde ; il suffit donc

de prouver que ces valeurs extrêmes satisfont aux autres conditions des limites supérieure et inférieure.

Pour cela, en désignant par a, b, c,... le système particulier des valeurs de x, y, z,..., auquel répond la plus petite valeur de L, ces valeurs a, b, c, étant comprises, comme x, y, z,..., entre les limites données, les différences $x-a$, $y-b$, $z-c$,..., prises, abstraction faite de leurs signes, finiront par décroître indéfiniment à mesure qu'on rapprochera suffisamment les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., des valeurs de x, y, z,..., et par suite il en sera de même de la différence positive $f(x, y, z,\ldots) - f(a, b, c,\ldots)$; nous voyons donc que cette valeur particulière $f(a, b, c,\ldots)$ satisfait à toutes les conditions d'une limite inférieure.

Nous prouverions de la même manière que la plus grande des valeurs de L satisfait à toutes les conditions d'une limite supérieure.

13. Le cas que nous venons de considérer aura évidemment lieu toutes les fois que L sera une fonction d'une seule variable de l'une des formes suivantes

$$x^\alpha, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \log x, \ldots,$$

c'est-à-dire toutes les fois qu'elle sera une fonction que l'on pourra ramener à des tables connues.

14. Un cas particulier, de la plus haute importance, est celui où il s'agit d'un produit de la forme

$$kx^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots,$$

dans lequel k, α, β, γ,... expriment des nombres positifs quelconques, et que les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., des valeurs de x, y, z,..., sont toutes positives.

Les deux limites de ce produit seront alors

$$kx'^\alpha y'^\beta z'^\gamma \ldots, \quad \text{et} \quad kx''^\alpha y''^\beta z''^\gamma \ldots$$

15. Il s'agit maintenant de montrer comment on peut ramener tous

les autres cas qui peuvent se présenter à ceux que nous venons de considérer dans les articles précédents.

II.

16. Désignons par P, Q, R,..., T, U, V,..., des fonctions quelconques dont on sait trouver les limites inférieures et supérieures; de plus, désignons par L une fonction composée d'une manière quelconque au moyen des premières, et parcourons les cas principaux qui peuvent se présenter.

17. Nous supposerons d'abord que l'on ait

$$L = P + Q + R + \ldots\ldots - T - U - V - \ldots\ldots;$$

dans ce cas, pour avoir la limite inférieure des valeurs de L, il suffira de prendre

$$L' = P' + Q' + R' + \ldots\ldots - T' - U' - V' - \ldots\ldots$$

et pour avoir leur limite supérieure il suffira de prendre

$$L'' = P'' + Q'' + R'' + \ldots\ldots - T'' - U'' - V'' - \ldots\ldots$$

En effet, deux simples soustractions nous donnent

$$\begin{aligned} L - L' &= (P - P') + (Q - Q') + (R - R') + \ldots\ldots \\ &\quad + (T' - T) + (U' - U) + (V' - V) + \ldots\ldots \\ L'' - L &= (P'' - P) + (Q'' - Q) + (R'' - R) + \ldots\ldots \\ &\quad + (T - T'') + (U - U'') + (V - V'') + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

dont les seconds membres se composent de parties qui, par hypothèse, sont toutes positives et qui finissent par devenir moindres que toute quantité donnée quand on resserre suffisamment les limites x', y', z',... et x'', y'', z''.....

18. En traduisant ces derniers résultats en langage ordinaire, on trouve que,

Pour obtenir la limite inférieure des valeurs d'une somme quel-

conque, il suffit de remplacer chaque partie positive par sa limite inférieure, et chaque partie négative par sa limite supérieure;

Pour obtenir la limite supérieure des valeurs d'une somme quelconque, il suffit de remplacer chaque partie positive par sa limite supérieure, et chaque partie négative par sa limite inférieure.

19. En rapprochant ce que nous venons de dire de l'observation de l'art. **14**, nous trouverons que,

Lorsqu'un polynome ne contient que des puissances positives des variables x, y, z,..., et que de plus les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., de ces variables sont toutes positives,

On aura une limite inférieure des valeurs de ce polynome en remplaçant x, y, z,..., par leurs limites inférieures dans ceux des termes de ce polynome qui sont positifs, et par leurs limites supérieures dans ceux qui sont négatifs.

On aura une limite supérieure des mêmes valeurs en remplaçant x, y, z,... par leurs limites supérieures dans ceux des termes du polynome qui sont positifs, et par leurs limites inférieures dans ceux qui sont négatifs.

III.

20. Supposons en second lieu que l'on ait

$$L = PQR \ldots\ldots TUV \ldots$$

Supposons en outre que les limites, et par suite toutes les valeurs de P, Q, R, ..., soient positives, mais que celles de T, U, V, ..., soient négatives.

Dans ce cas, on pourra prendre le plus petit des deux produits

$$P'Q'R' \ldots T''U''V'' \ldots, \quad \text{et} \quad P''Q''R'' \ldots T'U'V' \ldots,$$

pour la limite inférieure L′, et le plus grand pour la limite supérieure L″.

En effet, la valeur absolue de chacun des facteurs du produit PQR... TUV..., est plus grande que celle du facteur correspondant du produit P′Q′R′... T″U″V″..., et moindre que celle du facteur correspondant du produit P″Q″R″... T′U′V′...; et comme d'ailleurs

ces trois produits sont de même signe, il faut que la valeur du premier, prise en ayant égard au signe, soit comprise entre celles des deux autres. En outre, si l'on resserre indéfiniment les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., des valeurs de x, y, z,..., ces trois produits s'approcheront de plus en plus d'être égaux entre eux, et leurs différences finiront par devenir moindres que toute quantité donnée; on voit donc que toutes les conditions relatives aux limites des valeurs des fonctions se trouvent satisfaites.

Ce nouveau principe, combiné avec celui de l'art. **18**, et quelques préparations faciles à effectuer, suffit pour parvenir à la résolution des équations de forme quelconque. Cependant nous ajouterons encore quelques nouvelles règles qui peuvent être utiles, soit pour le même but, soit pour d'autres applications dont nous pourrons nous occuper dans une autre occasion.

IV.

21. Supposons maintenant que, dans la fonction donnée par l'égalité

$$L = PQR\ldots,$$

les facteurs P, Q, R,... soient quelconques. Dans ce cas nous ferons

$$P = P' + p, \quad Q = Q' + q, \quad R = R' + r, \ldots;$$

dès-lors p, q, r,..., seront des fonctions de x, y, z,..., dont les valeurs seront positives et comprises entre les limites

$$0 \text{ et } P'' - P', \quad 0 \text{ et } Q'' - Q', \quad 0 \text{ et } R'' - R', \ldots.$$

Au moyen de ces valeurs de P, Q, R,..., le produit PQR...., se changera en

$$(P' + p), \ (Q' + q), \ (R' + r), \ldots,$$

dont le développement conduira à une expression de la forme

$$\begin{aligned} P'Q'R' &+ Ap + A_1 q + A_2 r + \ldots, \\ &+ Bpq + B_1 pr + B_2 qr + \ldots, \\ &+ Cpqr + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dans laquelle A, A_1, A_2, A_3,..., B, B_1, B_2,..., C, C_1,..., seront des produits connus de quelques-uns des facteurs P', Q', R',.... Cela posé, on aura une limite inférieure de valeurs de ce développement, c'est-à-dire de L, en remplaçant p, q, r,..., par o, dans chacun des termes positifs du développement, et par $P'' - P'$, $Q'' - Q'$, $R'' - R'$,..., dans les termes négatifs.

On aura la limite supérieure de L en remplaçant p, q, r,..., par $P'' - P'$, $Q'' - Q'$, $R'' - R'$,..., dans chaque terme positif du développement, et par o dans les termes négatifs.

En effet, en opérant de cette manière, on ne fait que mettre en pratique la règle de l'art. **18**.

V

22. Nous terminerons ces sortes de recherches en traitant la fonction donnée par l'équation

$$L = f(P, Q, R, \ldots),$$

en supposant que f est le signe caractéristique d'une fonction telle, qu'on sache trouver les limites de $f(x, y, z, \ldots)$, quand on fait varier x, y, z,..., entre des limites données quelconques.

Dans ces sortes de cas, il suffira de chercher les limites des valeurs de $f(x, y, z, \ldots)$, qui peuvent avoir lieu quand on fait varier x, y, z,..., depuis $x = P'$ jusqu'à $x = P''$, depuis $y = Q'$ jusqu'à $y = Q''$, depuis $z = R'$ jusqu'à $z = R''$,...; les limites trouvées de cette manière seront évidemment celles de L.

23. En opérant, soit comme nous venons de l'indiquer dans les différents articles de ce chapitre, soit par la répétition successive des mêmes procédés, on finira par trouver les deux limites d'une fonction quelconque. Nous allons donc passer à la résolution des équations.

CHAPITRE TROISIÈME.

Résolution des équations.

I.

24. Les principes développés dans les deux chapitres précédents, nous permettent maintenant de résoudre cette question remarquable par sa grande généralité :

Étant données une ou plusieurs équations de forme quelconque

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

à une ou plusieurs inconnues, dont le nombre peut être différent de celui des équations; étant donné en outre un système de limites des valeurs des inconnues, trouver toutes les valeurs de ces inconnues qui peuvent être comprises entre les limites données, et satisfaire en même temps aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$.

24 *bis*. 1re *Méthode*. Nous commencerons par chercher les limites inférieures des valeurs que peuvent recevoir les fonctions $L, M, N, \ldots$, quand on fait varier $x, y, z, \ldots$, entre les limites données.

25. Il peut arriver que le calcul de ces limites inférieures conduise à en trouver une de positive. Dans ce cas, nous ne pousserons pas le calcul plus loin; la fonction qui aura donné lieu à cette limite positive ne peut pas devenir nulle tant que les valeurs de $x, y, z, \ldots$, sont comprises entre les limites données (art. **7**), et par conséquent la question proposée n'a pas de solution proprement dite.

26. Mais lorsque toutes les limites inférieures calculées seront négatives, nous procéderons au calcul des limites supérieures des valeurs des mêmes fonctions $L, M, N, \ldots$.

27. Il peut arriver que ce calcul nous conduise à trouver une valeur négative pour une de ces limites supérieures. Dans ce cas, nous nous arrêterons encore; la fonction qui aura donné lieu à cette limite négative ne peut pas devenir nulle tant que les valeurs de $x, y, z, \ldots$, sont comprises entre les limites données (art. **8**), et par conséquent la question proposée est comme dans le premier cas, elle n'a pas de solution proprement dite.

28. Lorsque toutes les limites inférieures des valeurs de L, M, N,..., seront négatives et leurs limites supérieures positives, nous en conclurons ou que les limites données renferment des solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,..., ou bien que ces limites sont trop écartées (*voir* l'article **10**).

29. D'après cela, nous subdiviserons le système de limites données des valeurs de x, y, z,..., en plusieurs autres systèmes de limites plus rapprochées, dont l'ensemble embrassera la même étendue que le système de limites primitives.

30. Nous recommencerons avec chacun de ces nouveaux systèmes de limites, comme nous avons déjà opéré avec le système primitif.

31. De cette manière, nous pourrons être conduits à exclure quelques-uns de ces nouveaux systèmes de limites comme ne pouvant pas renfermer de solution des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... Quant aux autres, nous les subdiviserons à leur tour en d'autres systèmes que nous traiterons de la même manière.

32. En opérant ainsi, nous finirons par exclure tous les nombres qui, étant compris entre les limites données pour les inconnues x, y, z,..., ne peuvent pas satisfaire aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,...

Les systèmes de limites qui n'auront pas été exclus nous feront connaître, avec tel degré d'approximation que l'on peut vouloir, toutes les solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,..., qui peuvent être comprises entre les limites données.

33. 2me *Méthode*. Nous prendrons des nombres positifs quelconques α, β, γ, et faisant, pour abréger,

$$V = \alpha L^2 + \beta M^2 + \gamma N^2 + \ldots,$$

nous n'aurons plus qu'à résoudre l'équation unique $V = 0$. Alors nous traiterons cette dernière équation par les procédés de la première méthode, mais avec cette différence, qu'il est entièrement inutile de calculer les limites supérieures des valeurs de la fonction auxiliaire V.

En effet, d'après la composition de cette fonction, elle ne peut jamais devenir négative; par suite ses limites supérieures seront toujours positives, et c'est là tout ce qu'on a besoin de savoir.

34. 3me *Méthode.* Il est facile de modifier la méthode de Newton, de telle manière qu'elle ne soit jamais en défaut, du moins tant que le nombre d'inconnues ne surpassera pas celui des équations.

35. Nous désignerons par a, b, c,..., et $a+h$, $b+k$, $c+l$,..., les limites approchées d'une solution, et nous ferons

$$x = a + t, \quad y = b + u, \quad z = c + v, \ldots;$$

de cette manière les valeurs cherchées de t, u, v,..., devront être comprises entre o et h, o et k, o et l,....

36. Si maintenant nous substituons ces valeurs de x, y, z,..., dans une fonction quelconque $F(x, y, z, \ldots)$, nous en déduirons un résultat de la forme

$$F(x, y, z, \ldots) = F(a, b, c, \ldots) + At + Bu + Cv + \ldots + \omega,$$

dans laquelle ω exprimera une fonction de t, u, v,..., de l'ordre des carrés et produits de ces dernières quantités, et dont il sera facile de déterminer les limites de la manière que nous allons indiquer.

37. Lorsque $F(x, y, z, \ldots)$ ne contiendra que des puissances entières et positives de x, y, z,..., on développera par les méthodes ordinaires de l'algèbre l'expression

$$F(a + t, \ b + u, \ c + v, \ldots);$$

des-lors la fonction ω sera entièrement connue, et ses limites faciles à déterminer par le procédé de l'art. **19**.

38. Lorsque $F(x, y, z, \ldots)$ sera une fonction d'une forme plus compliquée, on parviendra au même but en ayant recours aux procédés du Calcul différentiel. Ainsi, en désignant les dérivées du second ordre

$$\frac{d^2F(x, y, z, \ldots)}{dx^2}, \quad \frac{d^2F(x, y, z, \ldots)}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2F(x, y, z, \ldots)}{dy^2}, \ldots,$$

respectivement par

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots),$$

on aura

$$\omega = \frac{t^2}{1.2}\psi(a+it, b+iu, c+iv, \ldots) + \frac{tu}{1.1}\chi(a+it, b+iu, c+iv, \ldots$$
$$+ \frac{u^2}{1.2}\psi(a+it, b+iu, c+iv, \ldots) + \ldots,$$

dans laquelle i exprimera un certain nombre positif moindre que l'unité, mais de valeur inconnue.

Maintenant il sera facile de trouver les limites des valeurs que peut avoir la fonction ω, quand on fait varier t, u, v,..., et i, depuis 0 jusqu'à h, k, l,..., et 1.

39. En traitant les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,..., par des considérations analogues aux précédentes, nous les mettrons sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
A_1 t + B_1 u + C_1 v + \ldots + k_1 + \omega_1 &= 0,\\
A_2 t + B_2 u + C_2 v + \ldots + k_2 + \omega_2 &= 0,\\
A_3 t + B_3 u + C_3 v + \ldots + k_3 + \omega_3 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et de plus nous déterminerons les limites de chacune des fonctions ω_1, ω_2, ω_3,...

40. Après cela nous résoudrons ces nouvelles équations comme des équations du premier degré, dans lesquelles ω_1, ω_2, ω_3,..., exprimeraient des quantités littérales mais connues, et nous arriverons ainsi à des valeurs de la forme

$$t = a_1 + t_1, \quad u = b_1 + u_1, \quad v = c_1 + v_1,$$

dans lesquelles a_1, b_1, c_1,... seront précisément les valeurs que donnerait la méthode de Newton, tandis que t_1, u_1, v_1,... seront des parties affectées des valeurs de ω_1, ω_2, ω_3,....

41. Au moyen des limites connues de ω_1, ω_2, ω_3,..., nous chercherons celles de t_1, u_1, v_1,..., que, suivant nos conventions, nous désignerons par t'_1 et t''_1, u'_1 et u''_1, v'_1 et v''_1,...; et alors les valeurs de

$t, u, v, \ldots$, seront respectivement comprises entre

$$a_1 + t'_1, \quad b_1 + u'_1, \quad c_1 + v'_1, \ldots\ldots$$

et

$$a_1 + t_1, \quad b_1 + u_1, \quad c_1 + v_1, \ldots\ldots;$$

par suite les valeurs de $x, y, z, \ldots$, seront respectivement comprises entre

$$a + a_1 + t_1, \quad b + b_1 + u'_1, \quad c + c_1 + v_1, \ldots\ldots$$

et

$$a + a_1 + t'_1, \quad b + b_1 + u'_1, \quad c + c_1 + v'_1, \ldots\ldots$$

42. Il est à peine utile de faire observer que les valeurs de $t'_1, t''_1, u'_1, u'', v'_1, v''_1, \ldots$, seront en général des quantités de l'ordre des carrés et produits $h, k, l, \ldots$, et que si, par cas, les limites trouvées pour les valeurs de $x, y, z, \ldots$, étaient en contradiction avec les limites primitives $a, b, c, \ldots$, et $a+h, b+k, c+l, \ldots$, on devrait en conclure que ces limites $a, b, c, \ldots, a+h, b+k, c+l, \ldots$, ne peuvent pas comprendre de solution des équations $L = 0, M = 0, N = 0, \ldots$.

II.

43. Dans les trois méthodes que nous venons de développer, on a supposé que les fonctions $L, M, N, \ldots$, ne pouvaient pas devenir infinies tant que $x, y, z, \ldots$, restaient comprises entre les limites données. Cependant on peut avoir à résoudre des équations qui présentent cette circonstance exceptionnelle; il faut donc trouver les moyens de tourner cette difficulté.

44. Supposons, pour fixer les idées, qu'une ou plusieurs des équations données $L = 0, M = 0, N = 0, \ldots$, se présentent sous la forme suivante

$$PV^m + QV^{m-\alpha} + RV^{m-\beta} + \ldots + T = 0,$$

dans laquelle $m, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, peuvent être des nombres positifs quelconques, et V une fonction qui devient infinie pour un système particulier $a, b, c, \ldots$ des valeurs de $x, y, z, \ldots$.

Dans ce cas nous prendrons des limites auxiliaires $x', y', z', \ldots$,

et x'', y'', z'',..., qui comprennent a, b, c,..., et soient assez rapprochées de ces dernières valeurs pour que, tant qu'on reste entre ces limites, V ne puisse pas devenir nulle.

Après cela, nous chercherons les solutions qui peuvent être comprises entre ces limites auxiliaires, en remplaçant l'équation primitive

$$PV^m + QV^{m-1} + RV^{m-2} + \ldots + T = 0,$$

par l'équation équivalente

$$P + \frac{Q}{V^1} + \frac{R}{V^2} + \ldots + \frac{T}{V^m} = 0,$$

qui ne présente plus le même inconvénient que la première.

45. Nous traiterons d'une manière analogue toutes les équations qui pourront offrir une semblable difficulté.

III.

46. Nous terminerons ce chapitre en indiquant les moyens de déterminer le degré de multiplicité de chacune des solutions d'un système donné d'équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,....

47. Pour cela, il nous suffira de faire observer que, dans les deux premières méthodes de résolution des équations que nous avons développées, le nombre de ces équations est tout-à-fait indépendant de celui des inconnues qu'elles renferment. Par conséquent,

48. Pour trouver le degré de multiplicité des différentes solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,..., qui peuvent être comprises entre des limites données, il suffira de joindre à ces équations celles qui doivent être satisfaites par toute solution multiple, suivant le degré de multiplicité de cette solution. Ce degré sera connu d'après celles de ces équations de condition qui pourront être satisfaites.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Simplifications à employer dans les cas particuliers.

I.

49. Nous ne connaissons pas de simplification qui soit possible dans le cas où les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, ne contenant que des puissances entières des inconnues x, y, $z, \ldots$, on ne demande que les valeurs des inconnues qui peuvent être comprises entre des limites positives données. Dans ces sortes de cas, il sera facile de trouver les limites supérieures et inférieures des valeurs des fonctions L, M, N,..., au moyen des prescriptions de l'art. **19**, et par suite il sera facile d'appliquer nos méthodes de résolution.

50. Lorsque les fonctions L, M, N,..., ne renfermant, comme dans ce qui précède, que des puissances positives inconnues, on voudra trouver des solutions autres que celles dont on vient de parler, il vaudra mieux ramener la question au cas précédent, que de chercher à résoudre directement les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$: on peut parvenir à ce but de plusieurs manières; nous nous bornerons à en indiquer une.

51. Quelle que puisse être la valeur de x, il est facile d'observer qu'une des quatre quantités

$$x, \quad -x, \quad +\frac{1}{x}, \quad -\frac{1}{x},$$

sera nécessairement positive et moindre que l'unité. Faisant donc

$$-x = +t, \quad +x = +\frac{1}{u}, \quad -x = +\frac{1}{v},$$

ce qui donnera

$$x = -t, \quad x = -\frac{1}{u}, \quad x = -\frac{1}{v},$$

il faudra que, dans tous les cas, la valeur de l'une des quatre quantités x, t, u, v, soit positive et moindre que l'unité. Par conséquent, tout se réduira à trouver celles des valeurs de ces quantités qui pourront être comprises entre 0 et 1.

II.

52. Il peut arriver que les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.... renferment des radicaux plus ou moins composés. Dans ces sortes de cas, il sera facile de ramener la question au cas que nous venons de considérer dans le dernier paragraphe.

53. Supposons, par exemple, que ces équations renferment l'expression radicale $\sqrt[m]{P}$.

Dans ce cas nous ferons

$$\sqrt[m]{P} = t,$$

et alors nos équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,... ne renfermeront plus que t, à la place du radical primitif $\sqrt[m]{P}$; mais il faudra joindre l'équation auxiliaire

$$t^m - P = 0$$

à celles que l'on avait d'ailleurs.

Après cela, au moyen des limites données des valeurs des inconnues x, y, z,..., et de l'équation $\sqrt[m]{P} = t$, on déterminera les limites de la nouvelle inconnue t, et l'on se trouvera tout-à-fait rentré dans le cas du dernier paragraphe.

III.

54. Il peut arriver que les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,... renferment des expressions radicales superposées telles, par exemple, que l'expression

$$\sqrt[m]{P + Q\sqrt[n]{R + S\sqrt[p]{T}}};$$

dans ces sortes de cas nous ferons

$$\sqrt[p]{T} = t, \quad \sqrt[n]{R} = u,$$

et l'expression précédente se trouvera changée en $\sqrt[m]{P + Qu + St}$. Alors nous ferons

$$\sqrt[m]{P + Qu + St} = v,$$

et nous substituerons cette dernière valeur dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, lesquelles se trouveront ainsi débarrassées du radical complexe primitif. Mais aussi il faudra joindre aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, les équations auxiliaires

$$t^o - T = 0, \quad u^n - R = 0, \quad v^m - P - Qu - St = 0;$$

d'ailleurs, au moyen des limites données des valeurs de $x, y, z, \ldots$, et des équations

$$t = \sqrt[o]{T}, \quad u = \sqrt[n]{R}, \quad v = \sqrt[m]{P + Qu + St}, \ldots,$$

on déterminera les limites correspondantes des valeurs des nouvelles inconnues $t, u, v, \ldots$.

55. Quelle que puisse être la complication des radicaux qui se trouvent dans les fonctions $L, M, N, \ldots$, on pourra toujours s'en débarrasser par des procédés analogues aux précédents, répétés, s'il le faut, à différentes reprises. De cette manière, on pourra ramener au premier cas la résolution des équations de forme purement algébrique. Maintenant nous allons passer à la résolution des équations qui contiennent des transcendantes.

IV.

56. Lorsque les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ seront composées d'une somme de produits formés par la multiplication d'un coefficient numérique par un ou plusieurs facteurs des formes suivantes :

$$x^\alpha, \ (\sin x)^\beta, \ (\cos y)^\gamma, \ \operatorname{tang} y)^\delta, \ \log z)^\theta, \ \varepsilon^{\zeta}, \ldots,$$

la seule simplification possible consiste dans une subdivision convenable des limites données des valeurs des inconnues $x, y, z, \ldots$, et que nous allons indiquer.

57. En supposant que a et A soient les limites données des valeurs cherchées de l'inconnue x, nous chercherons toutes les valeurs particulières de x qui pourront rendre nulles ou infinies celles des fonc-

tions simples,

$$x^{\gamma},\ (\sin x)^{\delta},\ (\cos x)^{\gamma},\ (\operatorname{tang} x)^{\delta},\ (\log x)^{\beta},\ \varepsilon^{\alpha x},\ \ldots,$$

qui entrent dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, et qui seront en même temps comprises entre les limites données a et A. Alors nous insérerons ces valeurs par ordre de grandeur entre les limites a et A, et nous aurons ainsi une suite croissante

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ldots\ldots,\ a^{'''\cdots'},\ A,$$

qui sera telle, que

Tant que les valeurs de x, y, resteront comprises entre deux termes consécutifs de cette suite $a, a', a'', a''', \ldots, a^{'''\cdots'}$, A, les valeurs correspondantes de chacune des fonctions simples de x, qui entrent dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, resteront de même signe.

58. De même, en désignant par b et B les limites données pour les valeurs cherchées de y, nous formerons une suite $b, b', b'', b''', \ldots, b^{'''\cdots'}$, B, analogue à la précédente, $a, a', a'', a''', \ldots, a^{'''\cdots'}$, A; et nous agirons de même pour chacune des inconnues qui se trouveront entrer dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$.

59. Après cela nous remplacerons le système de limites données a, b, $c, \ldots$, et A, B, C, ..., par d'autres systèmes partiels que nous formerons en combinant, de toutes les manières possibles,

deux termes consécutifs de la suite $a, a', a'', a''', \ldots, a^{'''\cdots'}$, A,
avec deux termes consécutifs de la suite $b, b', b'', b''', \ldots, b^{'''\cdots'}$, B,
avec deux termes consécutifs de la suite $c, c', c'', c''', \ldots, c^{'''\cdots'}$, C,
. . . . . .

60. Enfin, nous chercherons les solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, qui peuvent être comprises dans l'étendue de chacun de ces nouveaux systèmes de limites, ce qui n'exigera que l'emploi de la règle de l'art. **20**.

V.

61. Lorsque les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ renfermeront des expressions d'une forme plus compliquée que celles que nous venons de considérer, il sera facile de ramener leur résolution à celle

d'autres équations qui rentreront dans le cas précédent : il suffira d'introduire une ou plusieurs inconnues auxiliaires convenablement choisies.

62. Supposons par exemple que les équations données renferment l'expression

$$\log\left[P^{\gamma} + Q^{\xi}(\sin R)^{\eta} + S^{\delta}(\operatorname{tang} U)^{\varepsilon}\right];$$

dans ce cas nous ferons

$$t = P^{\gamma} + Q^{\xi}(\sin R)^{\eta} + S^{\delta}(\operatorname{tang} U)^{\varepsilon},$$

et par là l'expression primitive se trouvera remplacée par $\log t$. Mais on devra joindre aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, transformées au moyen de cette substitution, l'équation auxiliaire

$$t - P^{\gamma} - Q^{\xi}(\sin R)^{\eta} - S^{\delta}(\operatorname{tang} U)^{\varepsilon} = 0.$$

63. Si, par cas, les nouvelles équations renferment encore des expressions de forme trop compliquée, on devra recommencer de la même manière, en introduisant une ou plusieurs nouvelles inconnues auxiliaires, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à des équations qui aient le degré voulu de simplicité.

64. Quand on aura procédé au mode de simplification dont nous venons de parler, on devra s'élever successivement aux valeurs des limites des inconnues auxiliaires t, u, $v, \ldots$, qui correspondent aux limites a, b, $c, \ldots$, A, B, C,..., des inconnues primitives x, y, $z, \ldots$; et alors enfin on n'aura plus à résoudre qu'une question semblable à celle que nous avons traitée dans le troisième paragraphe.

65. Dans le travail qui précède, j'ai supposé tacitement qu'il n'était question que de la recherche des solutions *réelles* des équations : je n'ai point mentionné les solutions imaginaires, parce que leur recherche est facile à ramener à celle des premières.

Il est d'ailleurs à peine nécessaire de faire observer que puisqu'il suffit de connaître les signes des quantités que nous avons désignées par L′, L″, M′, M″,..., il suffira de pousser les approximations assez loin pour que les signes de ces quantités ne soient pas douteux.

RECHERCHES

SUR LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES;

PAR ABEL TRANSON.

I.

On caractérise géométriquement la courbure d'une ligne en un quelconque de ses points par la détermination de son cercle osculateur en ce point. Mais comme entre deux courbes, qui passent par un même point, le contact est plus ou moins intime, suivant que les deux polygones infinitésimaux qui, à partir de ce point, représentent idéalement ces courbes, ont plus ou moins d'éléments communs, il semble qu'on aurait dû comprendre, dans la notion de la courbure, non pas seulement la situation relative des deux éléments successifs qu'implique le cercle osculateur, mais plus généralement l'ensemble des rapports de grandeur et de situation que présentent en chaque point les éléments successifs du polygone infinitésimal.

Cette idée de la courbure aurait l'avantage d'ouvrir aux investigations un champ indéfini. On ne dirait plus alors que le cercle osculateur mesure la courbure, mais seulement une première *affection de la courbure;* et lorsqu'on parviendrait à représenter, par des constructions géométriques entre quantités finies, les rapports de grandeur et de situation de quelque nouveau côté infiniment petit de la courbe avec les éléments antérieurement considérés, on aurait par-là obtenu la mesure de l'affection de courbure relative à ce nouvel élément.

Je me suis proposé, dans les recherches suivantes, de construire les deux affections qui impliquent le troisième et le quatrième élément infinitésimal, et d'étudier les lois de ces deux affections dans la courbure des surfaces.

II.

Je représente [*] par A, B, C, les trois points consécutifs qui déterminent le cercle osculateur d'une courbe plane, et par le point A je conçois une ligne parallèle à l'élément BC. Cette ligne rencontre en un point N la normale menée au milieu de BC, et le cercle osculateur en un point A′, tel qu'on a

$$AN = NA';$$

enfin elle rencontre la courbe même en un point D, de sorte que AD est la corde entière de la courbe, et CD est son troisième élément, c'est-à-dire l'élément consécutif aux éléments AB et BC.

Le point D est intérieur ou extérieur au cercle osculateur, suivant que AD est plus petit ou plus grand que AA′. Dans tous les cas, la distance entre A′ et D mesure l'écartement qui a lieu, dans le troisième élément CD, entre la courbe et son cercle osculateur.

Si l'on appelle f la flèche ou portion de la normale comprise entre le périmètre et la corde AD; et si δ est l'angle que fait avec la normale la ligne menée de l'extrémité de la flèche au milieu de cette corde, il sera facile de voir que l'écartement A′D est mesuré par $2f \tang \delta$; ou bien, en mettant pour f sa valeur tirée du cercle osculateur, par

$$A'D = \frac{ds^2}{\rho} \tang \delta = \rho \tang \delta . d\omega^2.$$

Cet écartement est donc, comme on devait s'y attendre, une quantité du second ordre. Si l'on veut comparer sa grandeur aux différents points d'une même courbe, il paraîtra sans doute nécessaire de l'évaluer par rapport à des arcs semblables considérés sur les cercles osculateurs qui sont particuliers à ces points; c'est-à-dire qu'on devra regarder $d\omega$ comme constant. De plus, s'il arrivait qu'en deux points différents le rapport de l'écartement A′D au rayon de courbure ρ fût le même, il serait naturel d'admettre que l'*altération de la forme cir-*

[*] Le lecteur est prié de tracer la figure.

culaire est égale de part et d'autre. Cette altération doit donc se mesurer par $\frac{A'D}{\rho}$, c'est-à-dire par tang $\delta . d\omega^2$, ou, plus strictement, par tang δ, puisque $d\omega$ est constant.

C'est cette quantité tang δ que je prends pour la seconde affection de la courbure, et je l'appelle indifféremment *déviation de la forme circulaire*, ou bien *première déviation de la courbure*, parce que c'est réellement la quantité dont la courbe proposée s'écarte de la forme circulaire dans ses éléments du troisième ordre. J'appelle aussi *axe de déviation* la ligne qui fait avec la normale l'angle δ, et cette ligne me paraît compléter la représentation géométrique ou l'image du polygone infinitésimal par rapport à son troisième élément, comme la tangente et le cercle osculateur sont les images de ce même polygone pour ses deux premiers côtés.

Ce choix a d'ailleurs dans les applications un grand avantage, résultant d'une propriété curieuse des sections coniques, que je démontrerai à la fin de cet exposé, et dont voici l'énoncé :

« Soit P un point quelconque d'une section conique, O le centre de » cette courbe, et C le centre de courbure relatif au point P. Menons » par C une parallèle à la tangente en P, ce sera la normale de la dé- » veloppée; la partie de cette normale, depuis le point C jusqu'à la » rencontre de la ligne OP, qui est le diamètre passant en P, sera » égale au tiers du rayon de courbure de la développée. »

Il n'est pas difficile de voir que dans une section conique le diamètre PO, conjugué à la tangente en P, est précisément ce que nous avons appelé l'axe de déviation ; de sorte que l'inclinaison de ce diamètre sur la normale est notre angle δ. Donc, si ρ et ρ' sont respectivement le rayon de courbure d'une conique et le rayon de courbure de sa développée, on a, pour la déviation dans les sections coniques, l'expression remarquable

$$\text{tang}\,\delta = \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho},$$

qui n'est que la représentation du théorème général qu'on vient d'énoncer.

On déduirait de là les lois très simples de la déviation dans les sec-

tions coniques; mais de plus on doit remarquer que, dans une courbe quelconque, l'axe de déviation étant la limite de situation des lignes qui joignent le point P de la courbe avec les milieux M, M′, M″,... des transversales parallèles à la tangente en P, cet axe n'est autre chose que le diamètre de toute section conique qui toucherait la proposée en P, par un contact du troisième ordre. (Ainsi, en particulier, c'est une ligne parallèle à l'axe de la parabole osculatrice.)

Cependant, une telle conique aurait le même rayon de courbure en P que la proposée, et aussi le rayon de courbure de sa développée serait le même par rapport à ce même point que celui de la courbe; car les deux rayons ρ et ρ' ou $\frac{d\rho}{d\omega}$, ne dépendent que des éléments du second et du troisième ordre qui sont communs aux deux courbes; d'où il résulte que ρ et ρ' étant le rayon de courbure d'une courbe quelconque et celui de sa développée, on a, comme dans les sections coniques,

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{1}{3} \frac{\rho'}{\rho}.$$

Maintenant, si l'on fait attention que ρ est donné par une formule très simple en fonction des coefficients différentiels de l'ordonnée, et que ρ' est égal à

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{d\omega}{dx}} = \frac{q\frac{d\rho}{dx}}{1+p^2},$$

on voit combien il est aisé de construire en chaque point, soit la valeur de la déviation, soit l'équation de la ligne que nous avons appelée axe de déviation.

Ainsi, en désignant par p, q, r, les premier, second et troisième coefficients différentiels, on a, pour la déviation,

$$\operatorname{tang} \delta = p - \frac{1+p^2}{3q^2} r;$$

et, pour l'équation de l'axe de déviation,

$$y' - y = \frac{p \operatorname{tang} \delta - 1}{p + \operatorname{tang} \delta}(x' - x),$$

dans laquelle x' et y' sont les coordonnées courantes, et où l'on pourra remplacer $\operatorname{tang} \delta$ par sa valeur.

Remarquons d'ailleurs que toutes les fois que la déviation est nulle, le rayon de courbure passe par un maximum ou un minimum; ou autrement le point correspondant constitue sur le périmètre de la courbe un sommet analogue aux sommets des sections coniques, c'est-à-dire un point dans lequel le centre osculateur a un contact du troisième ordre et non pas seulement du second.

Comme exemple particulier, on peut considérer la spirale logarithmique, qui se distingue de toutes les autres courbes en ce que sa déviation est constante, son axe de déviation étant représenté par le rayon réfléchi lorsqu'on regarde le rayon vecteur comme un rayon lumineux incident. Cette courbe joue, par rapport à la seconde affection de courbure, un rôle analogue à celui du cercle pour la première; car, de même que le cercle est la courbe de courbure constante lorsqu'on définit la courbure par deux éléments consécutifs, ainsi la spirale logarithmique est la courbe de courbure toujours semblable lorsqu'on définit la courbure par trois éléments. J'ajoute que la détermination de la spirale logarithmique osculatrice en chaque point ne saurait présenter aucune difficulté, d'après ce qui précède.

III.

En raison des propriétés singulières que nous venons de reconnaître dans la spirale logarithmique, on pourrait être conduit à prendre pour la troisième affection de courbure, c'est-à-dire pour l'affection qui dépend des éléments du quatrième ordre, l'altération de la forme spiro-logarithmique. Mais il me paraît également naturel, et surtout plus avantageux, de rapporter cette nouvelle affection de la courbure à la détermination de la conique osculatrice. Cela est d'autant plus aisé, que l'axe de déviation étant le lieu des centres des coniques qui ont avec la proposée un contact du troisième ordre, le centre de la conique

osculatrice, c'est-à-dire douée d'un contact du quatrième ordre, sera nécessairement à la rencontre des deux axes de déviation consécutifs: et puisque nous avons l'équation générale de cet axe, le problème de trouver la valeur R du demi-diamètre de la conique osculatrice relatif au point P, comme aussi de trouver le lieu des centres des coniques osculatrices, sera un problème de même genre et désormais aussi facile que de trouver, par l'intersection successive des normales, le rayon de courbure et le lieu des centres de courbure.

D'ailleurs la valeur de R a une forme très simple si l'on y introduit, avec ρ et ρ', qui sont déjà dans tang δ, la valeur ρ'' du rayon de courbure de la seconde développée. Comme cette quantité, égale à $\frac{d\rho'}{d\omega}$ ou $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, implique le coefficient différentiel du quatrième ordre, on voit, *à priori*, qu'elle doit suffire, avec ρ et ρ', pour exprimer R, qui manifestement ne peut dépendre lui-même que des quatre premiers coefficients différentiels.

Je m'arrête un instant à cette détermination de R, qui donnera lieu à quelques remarques utiles.

Représentons par $d\omega$ l'angle des deux normales consécutives, et par $d\psi$ celui des deux axes de déviation consécutifs; on a la relation

$$d\omega = d\psi + d\delta,$$

dans laquelle $d\delta$ est l'accroissement de l'angle de déviation δ. D'ailleurs l'arc de courbe ds recevra deux expressions égales, soit comme troisième côté du triangle formé par les deux normales successives, ou bien par les deux axes de déviation successifs; d'où résulte

$$\frac{R\,d\psi}{\cos\delta} = \rho\,d\omega,$$

relation qui fera connaître $d\psi$ en fonction de $d\omega$. On aura aussi $d\delta$ en fonction de $d\omega$, par la différentiation de

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\rho'}{\rho},$$

qui donne

$$\frac{d\delta}{\cos^2\delta} = \frac{1}{3}\,\frac{\rho\rho'' - \rho'^2}{\rho^2}\,d\omega.$$

Substituant donc les valeurs de $d\psi$ et de $d\delta$, et de plus ayant égard à la valeur de $\cos\delta$ en fonction de ρ et ρ', il viendra

$$R = \frac{3\rho^2\sqrt{\rho'^2 + 9\rho^2}}{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''}.$$

On voit que, pour tous les points d'une courbe dans lesquels la relation

$$4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho'' = 0$$

sera satisfaite, la conique osculatrice sera une parabole; ou autrement, la parabole osculatrice aura un contact du quatrième ordre, et non pas du troisième seulement. D'ailleurs, en de tels points, la valeur de R changera de signe; mais il est facile de voir que lorsque R est de même signe que ρ, le centre de courbure et celui de la conique osculatrice sont d'un même côté de la tangente, c'est-à-dire que la conique osculatrice est une ellipse; autrement ce serait une hyperbole. On saura donc reconnaître si les cinq points consécutifs d'une courbe sont sur une ellipse ou bien sur une hyperbole, ce qui suffira pour discuter la troisième affection de courbure dans les surfaces; d'ailleurs on verra facilement qu'on est conduit par les déterminations de tang δ et de R, à des constructions très simples, 1° pour la parabole osculatrice, et 2° pour la conique (ellipse ou hyperbole) osculatrice; ce qui donnera, par le moyen des sections coniques, et abstraction faite de toute notion nouvelle sur la courbure en général, la loi géométrique du polygone infinitésimal dans ses trois ou quatre éléments consécutifs.

IV.

Pour étudier les lois des seconde et troisième affections de la courbure dans les surfaces, il n'y a qu'à étendre aux éléments de troisième et de quatrième ordre le calcul qu'on fait ordinairement pour ceux du second ordre, lorsqu'on étudie la courbure au moyen des cercles os-

culateurs des sections normales ou obliques. J'exposerai dans ce paragraphe ce qui est relatif à la déviation de courbure des sections normales.

Supposons, comme à l'ordinaire, qu'on ait pris pour axe des z la normale au point pour lequel on étudie la surface; l'équation différentielle de celle-ci aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} dz = {} & b_0 dx^2 \frac{1}{1.2} + c_0 dx^3 \frac{1}{1.2.3} + d_0 dx^4 \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}, \\ & + 2b_1 dx dy + 3c_1 dx^2 dy + 4d_1 dx^3 dy \\ & + b_2 dy^2 + 3c_2 dx dy^2 + 6d_2 dx^2 dy^2 \\ & + c_3 dy^3 + 4d_3 dx dy^3 \\ & + d_4 dy^4 \end{aligned}$$

formule dans laquelle b_0, b_1, b_2, c_0, etc., sont respectivement les valeurs que prennent les coefficients différentiels

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^3z}{dx^3}, \quad \text{etc.},$$

lorsqu'on y fait $x = 0$ et $y = 0$. Maintenant toute section normale dont la trace sur le plan tangent, prise pour axe des x', fera avec l'axe des x un angle φ, aura un développement de la forme

$$dz = \frac{1}{1.2} B_0 dx'^2 + \frac{1}{1.2.3} C_0 dx'^3 + \frac{1}{1.2.3.4} D_0 dx'^4 + \ldots.$$

dans lequel

$$B_0 = \left(\frac{d^2z}{dx'^2}\right)_{x'=0} = b_0 \cos^2\varphi + 2b_1 \cos\varphi \sin\varphi + b_2 \sin^2\varphi,$$

$$C_0 = \left(\frac{d^3z}{dx'^3}\right)_{x'=0} = c_0 \cos^3\varphi + 3c_1 \cos^2\varphi \sin\varphi + 3c_2 \cos\varphi \sin^2\varphi + c_3 \sin^3\varphi,$$

etc.;

et, parce que la déviation est donnée en général par

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{dz}{dx'} - \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx'}\right)^2\right] \frac{d^3z}{dx'^3}}{3\left(\frac{d^2z}{dx'^2}\right)^2},$$

ce sera ici, à cause de $\frac{dz}{dx'} = 0$,

$$\tang \delta = -\frac{C_0}{3B_0^2} = -\frac{c_0 - 3c_1 \tang \varphi + 3c_2 \tang^2 \varphi - c_3 \tang^3 \varphi}{3(b_0 + 2b_1 \tang \varphi + b_2 \tang^2 \varphi)^2} \sqrt{1 - \tang^2 \varphi},$$

formule de laquelle on déduit immédiatement cette première conséquence que, *parmi toutes les sections normales relatives à un même point, il y en a toujours une ou bien trois qui offrent en ce point une déviation nulle, ou autrement, qui offrent en ce point un sommet.*

Plus généralement, toute surface se partage en deux sortes de régions distinguées par ce caractère que, en chacun de leurs points, il y a pour les unes trois sections normales à déviation nulle et une seule pour les autres. Enfin pour chaque point des courbes séparant ces deux sortes de régions il y a généralement deux sections normales à déviation nulle.

Après cela, si l'on fait attention que le rayon du cercle osculateur étant donné par

$$\rho = \frac{1 + \tang^2 \varphi}{b_0 + 2b_1 \tang \varphi + b_2 \tang^2 \varphi},$$

le point proposé est elliptique ou hyperbolique (je veux dire à indicatrice elliptique ou à indicatrice hyperbolique), selon que les racines du dénominateur égalé à zéro sont imaginaires ou bien réelles, on reconnaîtra que pour les points elliptiques toutes les déviations des sections normales sont comprises entre des limites finies; tandis qu'aux points hyperboliques la déviation devient infinie dans les deux directions pour lesquelles la courbure change de signe. Enfin, il y aurait à examiner les circonstances provenant de ce qu'un ou plusieurs facteurs du premier degré en tang φ seraient communs au numérateur et au dénominateur de tang δ; et parmi ces circonstances il convient de signaler au moins celle de certains points dans lesquels aucune des sections normales n'a sa déviation nulle; points singuliers appartenant nécessairement, lorsqu'ils existent, aux courbes qui séparent les deux sortes de régions dont nous avons indiqué l'existence.

V.

Pour exposer la loi de la déviation de courbure dans les sections obliques, je prends pour axe des x sur le plan tangent la ligne suivant laquelle on fait passer tous les plans sécants.

Si l'on rapporte la section à deux axes situés dans son plan, dont l'un sera ce même axe des x, et l'autre, ou axe des Y, sera la trace du plan sécant sur celui des zy; alors on aura pour équation différentielle de cette courbe

$$dY = \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_0 dx^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4Y}{dx^4}\right)_0 dx^4 + \text{etc...}$$

et de plus, en appelant θ l'angle que fait le plan sécant avec celui des zx, on a les relations

$$z = Y\cos\theta,$$
$$y = Y\sin\theta,$$

qui, étant substituées dans l'équation de la surface, donneraient celles de la courbe; ou bien, au moyen desquelles on peut calculer facilement les coefficiets de l'équation différentielle ci-dessus; car, en ayant égard à l'équation de la surface, on a les relations suivantes

$$(1)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dY}{dx}\sin\theta = \frac{dY}{dx}\cos\theta.$$

$$(2)\quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\frac{dY}{dx}\sin\theta + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dY}{dx}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2Y}{dx^2}\sin\theta = \frac{d^2Y}{dx^2}\cos\theta.$$

$$(3)\quad \left.\begin{aligned}\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) &+ 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{dY}{dx}\sin\theta + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\left(\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)^2 + \frac{d^3z}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)^3\\ &+ 3\frac{d^2z}{dxdy}\frac{d^2Y}{dx^2}\sin\theta + 3\frac{d^2z}{dy^2}\frac{d^2Y}{dx^2}\frac{dY}{dx}\sin^2\theta\end{aligned}\right\} = \frac{d^3Y}{dx^3}\cos\theta.$$

lesquelles, pour $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, donnent respectivement

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 = \frac{b_0}{\cos\theta},$$

$$\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_0 = \frac{c_0}{\cos\theta} + 3\,\frac{b_1 b_0 \sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{c_0 + 3\,b_1 b_0 \operatorname{tang}\theta}{\cos\theta}.$$

et d'après cela, la valeur de la déviation se trouvera donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\delta = -\frac{c_0\cos\theta + 3\,b_1 b_0 \sin\theta}{3\,b_0^2}.$$

A la seule inspection de cette formule, on reconnaît que, de toutes les sections obliques qui passent par la même tangente, il y en a une seule dont la déviation est nulle : elle répond à l'inclinaison Θ_1, déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\Theta_1 = -\frac{c_0}{3b_1 b_0}.$$

Il y a aussi un maximum unique pour l'inclinaison déterminée par

$$\operatorname{tang}\Theta_2 = \frac{3b_1 b_0}{c_0};$$

de sorte que la section douée de la plus grande déviation est perpendiculaire à celle de déviation nulle. Au reste, si on représente la déviation maximum par tang D, il sera facile de reconnaître qu'on a, pour la déviation relative à une section quelconque

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang} D \cos\varepsilon,$$

ε étant l'angle des plans correspondants. Or c'est ici un théorème tout-à-fait analogue à celui de Meusnier, avec cette seule différence que, de

toutes les sections relatives à une même tangente, c'est la section normale qui a le plus grand rayon de courbure et à laquelle on doit comparer une section quelconque pour établir le théorème en question; au lieu que la section de plus grande déviation est généralement inclinée au plan tangent et ne se confond avec la section normale que dans les deux azimuths qui correspondent aux sections principales. Alors, en effet, la valeur de Θ_2 est nulle parce qu'on a $b_1 = 0$.

Enfin, ces diverses propriétés des sections obliques, quant à leurs premières déviations, sont renfermées dans cette loi simple que *les axes de déviation de toutes les sections relatives à un même azimut forment un plan.* — Appelons, en effet, x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de l'axe de déviation de la section qui est déterminée par l'angle θ, on aura évidemment

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}};$$

et en substituant ces valeurs dans la formule de la déviation, il viendra

$$3b_0^2 x + 3b_1 b_0 y + c_0 z = 0.$$

qui est l'équation du plan en question. — Or chaque plan, mené par l'axe des x, coupe le plan des zy et celui qu'on vient de déterminer suivant deux lignes qui sont respectivement la normale et l'axe de déviation de la section correspondante; et de là la loi que nous avons reconnue entre les quantités ε, δ et D. Il ne serait pas difficile, après cela, de trouver le lieu des axes des paraboles osculatrices de toutes les sections obliques relatives à une même tangente, le lieu des foyers de ces mêmes paraboles, etc.

VI.

Pour étudier la courbure des surfaces dans les éléments du quatrième ordre, il suffit de remarquer que les sections normales relatives à un

même point pourront être appelées elliptiques, hyperboliques, ou enfin paraboliques, suivant que leurs cinq points successifs, ou leurs quatre éléments consécutifs, seront sur une ellipse, sur une hyperbole ou sur une parabole.

Or la valeur du demi-diamètre de la conique osculatrice au lieu de l'osculation est donnée, comme on l'a vu dans le § III, par la formule

$$R = \frac{3\rho^2\sqrt{\rho'^2 + 9\rho^2}}{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''}.$$

D'ailleurs, en appelant p, q, r, s les coefficients différentiels successifs de l'ordonnée d'une courbe quelconque en fonction de l'abscisse, et en supposant, comme cela aura lieu dans les calculs suivants, que le premier de ces coefficients soit nul, on trouvera facilement les relations ci-dessous

$$\rho = \frac{1}{q}, \qquad \rho' = -\frac{r}{q^3}, \qquad \rho'' = \frac{3r^2 + q^4 - qs}{q^5};$$

lesquelles donnent, pour le demi-diamètre de la conique osculatrice, la valeur

$$R = \frac{3q\sqrt{r^2 + 9q^4}}{3qs - 5r^2}.$$

Pour appliquer cette formule aux sections normales d'une surface, il faudra se reporter aux calculs du § IV, qui donnent, pour une telle section, les valeurs de q, r, s en fonction des dérivées partielles de la variable principale et de l'angle φ qui caractérise chaque section; on trouvera ainsi que les directions dans lesquelles la valeur de R passe par l'infini, sont données par l'équation

$$3B_0D_0 - 5C_0^2 = 0,$$

qui est du sixième degré en tang φ. De sorte que, parmi les sections normales relatives à un même point, *le nombre des sections parabo-*

liques est un des suivants, 6, 4, 2 ou 0, et sous ce rapport, on peut concevoir toute surface partagée en quatre sortes de régions distinctes.

Les sections paraboliques, déterminées au moyen de l'équation ci-dessus, divisent le plan tangent en autant d'aires distinctes que cette équation fournit de racines inégales. (Je comprends, dans une même aire, les deux angles égaux opposés par le sommet et formés par deux sections paraboliques consécutives.) — Or, si la section parabolique, qui sépare deux aires contiguës, correspond à une racine simple de l'équation en tang φ, il est manifeste que le signe de R change lorsqu'on passe de l'une à l'autre de ces deux aires, ce qu'on peut exprimer comme il suit :

Les sections normales qui font partie d'une même aire sont de même genre, elliptiques ou hyperboliques; et les sections qui appartiennent à deux aires contiguës sont de genre différent.

Mais, dans les points singuliers pour lesquels l'équation en tang φ a des racines égales, la règle qu'on vient d'énoncer souffre évidemment exception.

On étendra cette recherche aux sections obliques en se plaçant dans les circonstances indiquées au § V, et en ajoutant aux équations (1), (2) et (3) la suivante, dans laquelle je n'écris pas les termes qui doivent s'évanouir par la substitution des valeurs $x = 0$, $y = 0$, et $z = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4 z}{dx^4} + \ldots \\ &\quad + 6\,\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\,\frac{d^2 Y}{dx^2}\sin\theta + \ldots \\ &\quad + 3\,\frac{d^2 z}{dx\,dy}\,\frac{d^3 Y}{dx^3}\sin\theta + 3\,\frac{d^2 z}{dy^2}\left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right)^2 \sin^2\theta \end{aligned}\right\} = \frac{d^4 Y}{dx^4}\cos\theta.$$

D'ailleurs, ces substitutions donneront, après les réductions,

$$\left(\frac{d^4 Y}{dx^4}\right)_0 = \frac{d_0 + 3\,(b_1 c_0 + 2\,b_0 c_1)\tan\theta + 3\,b_0(b_0 b_2 + 3\,b_1^2)\tan^2\theta}{\cos\theta}.$$

On pourra donc former l'équation de condition

$$3qs - 5r^2 = 0,$$

qui sera du second degré en tang θ.

Quand les deux racines de cette équation seront imaginaires, toutes les sections relatives à la tangente correspondante seront du meme genre, c'est-à-dire, toutes elliptiques, ou bien toutes hyperboliques. Si ces deux racines sont réelles et inégales, elles détermineront deux sections paraboliques qui sépareront les sections elliptiques des hyperboliques. Enfin, si les racines sont égales, toutes les sections seront de même genre; mais elles atteindront la forme parabolique dans l'inclinaison correspondante à la racine double. D'ailleurs, il convient d'observer que ces trois circonstances ont généralement lieu dans un même point en y considérant les sections obliques, relatives à des tangentes diverses.

VII.

Je vais maintenant démontrer la propriété générale des sections coniques, annoncée ci-dessus, § II.

Soient e l'excentricité d'une section conique, P le rayon de courbure au sommet du grand axe, ω l'angle de la normale avec cet axe, α l'angle de cette même normale avec le rayon vecteur, ρ et ρ' les rayons de courbure de la conique et de sa première développée, on a les trois relations

$$\sin\alpha = e\sin\omega, \quad \rho = \frac{P}{\cos^3\alpha}, \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

De là il est facile de conclure

$$\rho' = 3\rho\,\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{\operatorname{tang}\omega},$$

relation qui déjà par elle-même fournit une construction générale

et très simple pour ρ'. Dans le cas de la parabole, si l'on appelle δ l'angle que fait avec la normale le diamètre conjugué à la tangente au point pour lequel on calcule ρ et ρ', on a $\delta = \alpha = \omega$, et par suite

$$\rho' = 3\rho \operatorname{tang} \delta;$$

de sorte que la propriété annoncée au § II se trouve démontrée pour la parabole.

Pour l'établir dans sa généralité, on prendra la normale et la tangente α pour axe des coordonnées. Les équations des rayons vecteurs et du diamètre conjugué à la tangente seront respectivement

$$y = x \operatorname{tang} \alpha, \quad y = -x \operatorname{tang} \alpha, \quad y = x \operatorname{tang} \delta.$$

En même temps l'équation du grand axe sera

$$y = (x - \rho \cos^2 \alpha) \operatorname{tang} \omega,$$

à cause de la valeur connue de la normale

$$N = \rho \cos^2 \alpha.$$

D'ailleurs le diamètre conjugué coupe l'axe au centre, c'est-à-dire au milieu de cette partie de l'axe qui est interceptée par les deux rayons vecteurs; et cette condition étant exprimée donnera, la relation

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha}{\operatorname{tang} \omega},$$

qui, substituée dans la valeur trouvée ci-dessus pour ρ', établira la formule dont nous avons fait usage.

A l'aide de cette propriété des sections coniques et de la valeur R du demi-diamètre, donnée en fonction de ρ, ρ' et ρ'', ci-dessus, au § II, il sera facile de construire en chaque point d'une courbe quelconque une conique qui ait avec elle un contact d'ordre déterminé.

En effet, l'axe de déviation est le lieu des centres de toutes les coniques qui ont avec la proposée un contact du troisième ordre, et en particulier, c'est une ligne parallèle à l'axe de la parabole osculatrice. Donc si l'on projette le centre de courbure O de la courbe proposée sur l'axe de déviation par une perpendiculaire OD, puis que de nouveau on projette le point D sur la normale par la perpendiculaire DN, le point N sera le pied de la normale sur l'axe de la parabole osculatrice. Cette dernière se trouvera donc entièrement déterminée.

A ce propos, je remarquerai que le lieu des foyers des paraboles qui ont avec la proposée un contact du second ordre seulement, est un cercle construit sur le demi-rayon de courbure comme diamètre; et aussi que toutes les directrices de ces mêmes paraboles passent par un point situé sur la normale, hors de la concavité et à une distance du périmètre égale aussi au demi-rayon de courbure.

Enfin voici une propriété à l'aide de laquelle on construira la conique osculatrice, c'est-à-dire l'ellipse ou bien l'hyperbole qui touche la proposée par un contact du quatrième ordre.

L'enveloppe des axes de toutes les coniques qui ont avec la proposée un contact du troisième ordre seulement, est une parabole ayant pour directrice l'axe de déviation et pour foyer la projection du centre de courbure O sur le rayon vecteur de la parabole osculatrice (rayon vecteur facile à déterminer, puisqu'il est incliné sur la normale de l'angle δ qui caractérise l'axe de déviation). Or cette loi s'applique en particulier à la conique osculatrice dont le centre C est fixé sur l'axe de déviation par la valeur de R. De ce point C on menera donc à la parabole ci-dessus définie, deux tangentes qui seront perpendiculaires entre elles et seront les deux axes de la conique osculatrice. Pour distinguer l'axe principal, on remarquera qu'il doit rencontrer la normale entre le périmètre et le point O, centre de courbure. Or on reconnaîtra sans peine que des deux tangentes menées par le point C il y en aura toujours une et une seule qui satisfera à cette condition, quelle que soit d'ailleurs la situation de ce point C sur l'axe de déviation.

On fixera d'après ce qui précède le point N_1, pied de la normale sur l'axe principal de la conique osculatrice. La perpendiculaire élevée à la normale par ce point rencontrera en D et D′ le cercle décrit sur le rayon de courbure comme diamètre. Ces points appartiennent aux deux rayons vecteurs de la conique osculatrice, lesquels, par leur rencontre avec l'axe principal, détermineront les foyers F et F′.

THÈSE

SUR

LA DISTINCTION DES MAXIMA ET DES MINIMA

DANS

LES QUESTIONS QUI DÉPENDENT DE LA MÉTHODE DES VARIATIONS.

PAR CH. DELAUNAY.

Lorsqu'une quantité est fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes, on sait que, pour déterminer les valeurs de ces variables qui rendent la fonction un maximum ou un minimum, il faut attribuer à chacune d'elles un accroissement infiniment petit, développer la fonction suivant les puissances de ces accroissements, et égaler à zéro l'ensemble des termes du premier ordre : l'équation qui en résulte se décompose en autant d'équations qu'il y a de variables indépendantes, et ces équations font connaître les valeurs cherchées de ces variables. Pour distinguer ensuite si ces valeurs donnent un maximum ou un minimum, on les substitue dans les termes du second ordre : si l'ensemble de ces termes reste constamment positif, quels que soient les accroissements infiniment petits attribués aux variables, il y a minimum; s'il reste constamment négatif, il y a maximum; si enfin l'ensemble des termes du second ordre peut changer de signe, il n'y a ni maximum ni minimum.

Dans les problèmes, d'un ordre plus élevé, où l'on se propose de déterminer une courbe par la condition de rendre maximum ou minimum une intégrale définie qui dépend de cette courbe, on doit suivre la même marche. Il faut que la courbe cherchée soit telle, qu'en la changeant infiniment peu, c'est-à-dire en donnant à chacune de ses

ordonnées un accroissement infiniment petit, l'ensemble des termes du premier ordre, dans l'accroissement qui en résultera pour l'intégrale définie, soit égal à zéro. La méthode des variations, inventée par Lagrange, donne le moyen de calculer ces termes du premier ordre, et de les mettre sous une forme telle, qu'on puisse en déduire de suite l'équation différentielle de la courbe cherchée, et les conditions aux limites qui doivent servir à la détermination des constantes introduites par l'intégration de cette équation différentielle.

Quant à la distinction des cas où il y a maximum, ou minimum, ou ni l'un ni l'autre, c'est encore dans la considération des termes du second ordre qu'il faut la chercher. Legendre est le premier qui s'en soit occupé (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1786): sa méthode consiste à transformer la variation seconde de l'intégrale définie proposée de manière à introduire un carré parfait sous le signe $\int$. Mais cette transformation suppose l'intégration d'équations différentielles assez compliquées, et Legendre n'a pas donné le moyen d'effectuer cette intégration.

Plus tard Lagrange a donné une méthode plus générale (*Théorie des fonctions analytiques*): elle consiste à introduire sous le signe $\int$, non plus un carré parfait, mais une quantité essentiellement positive; et pour cela il suffit de satisfaire à certaines inégalités qui comprennent comme cas particulier les équations différentielles de Legendre. Mais la difficulté de satisfaire à ces inégalités rend la méthode aussi peu praticable que celle de Legendre. Lagrange a fait en outre la remarque qu'il ne suffit pas que l'élément de l'intégrale conserve toujours le même signe, mais qu'il faut aussi que cet élément ne devienne pas infini entre les limites données, sans quoi la variation seconde pourrait changer de signe.

Tel était l'état de la question, lorsque M. Jacobi [*] est parvenu à effectuer la même transformation que Legendre, en n'employant que des intégrations par parties successives, et cela toutes les fois que l'équation différentielle de la courbe a été intégrée. En comparant sa méthode à celle de Legendre, il en a déduit les intégrales des équa-

[*] Voir le Mémoire de M. Jacobi, tome III de ce Journal, page 44.

tions différentielles dont j'ai parlé. C'est cette méthode de M. Jacobi que je vais développer, en commençant par démontrer un théorème sur lequel elle est fondée : je l'appliquerai ensuite à quelques exemples.

§ I.

Théorème préliminaire [*].

Soit

$$(1)\quad Ay + \frac{d.A_1y'}{dx} + \frac{d^2A_2y''}{dx^2} + \frac{d^3A_3y'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^nA_ny^{(n)}}{dx^n} = 0$$

une équation différentielle linéaire de l'ordre $2n$, dans laquelle $y^{(m)}$ est mis pour $\frac{d^my}{dx^m}$, et les coefficients $A, A_1, A_2, \ldots$, sont des fonctions données de x; si u est une valeur quelconque de y satisfaisant à cette équation, l'expression

$$u\left\{Auy + \frac{d.A_1uy'}{dx} + \frac{d^2.A_2uy''}{dx^2} + \frac{d^3.A_3uy'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^n.A_nuy^{(n)}}{dx^n}\right\} = U$$

sera une dérivée exacte, quel que soit y, et son intégrale aura la même forme que le premier membre de l'équation (1), c'est-à-dire que l'on aura

$$\int U\,dx = By + \frac{dB_1y'}{dx} + \frac{d^2B_2y''}{dx^2} + \frac{d^3B_3y'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^{n-1}B_{n-1}y^{(n-1)}}{dx^{n-1}}.$$

Pour démontrer ce théorème, multiplions par uy le premier membre de l'équation identique

$$Au + \frac{d.A_1u'}{dx} + \frac{d^2.A_2u''}{dx^2} + \frac{d^3.A_3u'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^n.A_nu^{(n)}}{dx^n} = 0,$$

* M. Lebesgue vient de publier une autre démonstration du même théorème; mais cette démonstration ne m'était pas connue lorsque j'ai rédigé ma thèse. (C. P.)

retranchons-le de U, ce qui ne changera pas sa valeur, et nous aurons

$$U = u\frac{d.A_1(uy)'}{dx} + u\frac{d^2.A_2(uy)''}{dx^2} + u\frac{d^3.A_3(uy)'''}{dx^3} + \ldots + u\frac{d^n.A_n(uy)^{n}}{dx^n}$$
$$- uy\frac{d.A_1u'}{dx} - uy\frac{d^2.A_2u''}{dx^2} - uy\frac{d^3.A_3u'''}{dx^3} - \ldots - uy\frac{d^n.A_nu^{n}}{dx^n}.$$

S'il ne s'agissait que de démontrer que U est une dérivée exacte, on y arriverait très-simplement par des intégrations par parties successives; mais pour faire voir que $\int U dx$ peut se mettre sous la même forme que le premier membre de l'équation (1), il faut suivre une autre marche. Pour cela je vais prouver que si l'on pose

$$X = u\frac{d^m.A_m(uy)^{(m)}}{dx^m} - uy\frac{d^m.A_mu^{(m)}}{dx^m},$$

X pourra se mettre sous la forme

$$\frac{d.by'}{dx} + \frac{d^2.b_1y''}{dx^2} + \frac{d^3b_2y'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^m.b_{m-1}y^{(m)}}{dx^m},$$

ce qui donnera

$$\int X dx = by' + \frac{d.b_1y''}{dx} + \frac{d^2.b_2y'''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{m-1}.b_{m-1}y^{(m)}}{dx^{m-1}}.$$

et par suite

$$\int U dx = \sum_{m=1}^{m=n} \int X dx = By' + \frac{d.B_1y''}{dx} + \frac{d^2.B_2y'''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^{n-1}.B_{n-1}y^{(n)}}{dx^{n-1}}.$$

Observons d'abord que si P et Q sont deux fonctions de x, qu'on désigne par P′, P″,... les dérivées successives de P, et par (m, p) le nombre des combinaisons de m lettres p à p, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} P\dfrac{d^mQ}{dx^m} = \dfrac{d^mPQ}{dx^m} - (m,1)\dfrac{d^{m-1}P'Q}{dx^{m-1}} + (m,2)\dfrac{d^{m-2}P''Q}{dx^{m-2}} - \ldots \\ \qquad + (-1)^p(m,p)\dfrac{d^{m-p}P^{(p)}Q}{dx^{m-p}} + \ldots + (-1)^mP^{(m)}Q. \end{cases}$$

Si l'on applique cette formule aux deux parties de X et qu'on développe ensuite les puissances de uy qui seront indiquées, on trouvera

$$
\begin{aligned}
u\frac{d^m A_m(uy)^m}{dx^m} &= \frac{d^m . uA_m[uy^{(m)} + (m,1)u'y^{(m-1)} + (m,2)u''y^{(m-2)} + \ldots + (m,m-1)u^{(m-1)}y' + u^{(m)}y]}{dx^m} \\
&- (m,1)\frac{d^{m-1} . u'A_m(uy^{(m)} + (m,1)u'y^{(m-1)} + (m,2)u''y^{(m-2)} + \ldots + (m,m-1)u^{(m-1)}y' + u^{(m)}y]}{dx^{m-1}} \\
&- (m,2)\frac{d^{m-2} u''A_m(uy^{(m)} + (m,1)u'y^{(m-1)} + (m,2)u''y^{(m-2)} + \ldots + (m,m-1)u^{(m-1)}y' + u^{(m)}y]}{dx^{m-2}} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- (-1)^m(m,m-1)\frac{du^{(m-1)}A_m(uy^{(m)} + (m,1)u'y^{(m-1)} + (m,2)u''y^{(m-2)} + \ldots + (m,m-1)u^{(m-1)}y' + u^{(m)}y]}{dx} \\
&+ (-1)^m u^{(m)} A_m[uy^{(m)} + (m,1)u'y^{(m-1)} + (m,2)u''y^{(m-2)} + \ldots + (m,m-1)u^{(m-1)}y' + u^{(m)}y] ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
uy\frac{d^m . A_m u^{(m)}}{dx^m} &= \frac{d^m . A_m u^{(m)} uy}{dx^m} - (m,1)\frac{d^{m-1} . A_m u^{(m)}(uy' + u'y)}{dx^{m-1}} + (m,2)\frac{d^{m-2} A_m u^{(m)}(uy'' + 2u'y' + u''y)}{dx^{m-2}} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- (-1)^{m-1}(m,m-1)\frac{d . A_m u^{(m)} uy^{(m-1)} + (m-1,1)u'y^{(m-2)} + (m-1,2)u''y^{(m-3)} + \ldots + (m-1,m-2)u^{(m-2)}y' + u^{(m-1)}y}{dx} \\
&- (-1)^m A_m u^{(m)} uy^{(m)} + (m,1)u'y^{(m-1)} + (m,2)u''y^{(m-2)} + \ldots + (m,m-1)u^{(m-1)}y' + u^{(m)}y .
\end{aligned}
$$

Le dernier terme étant le même dans ces deux développements, on voit déjà que X est une dérivée exacte. Pour démontrer que X peut se mettre sous la forme énoncée, je vais faire voir que, si l'on transforme les deux développements précédents, de manière que dans chaque terme il n'entre sous le signe $\frac{d^k}{dx^k}$ que les deux dérivées de y des ordres k et $k+1$, ce qui est toujours possible, le coefficient de $y^{(k+1)}$ disparaîtra de lui-même.

D'abord on reconnaît facilement que, dans chacun de ces deux développements, tous les termes, à l'exception de ceux où l'ordre de la dérivée de y est égal à l'indice du signe d, peuvent se grouper deux à deux, de manière que chaque groupe soit compris dans la forme générale

$$
M\left[\frac{d^r(C_t y^{(r+t)})}{dx^r} \pm \frac{d^{r+t} . C_t y^{(r)}}{dx^{r+t}}\right],
$$

M étant un coefficient constant, et le second terme ayant le signe $+$ si t est pair, et le signe $-$ si t est impair.

Supposons, par exemple, $t = 2s$; nous aurons, en vertu de la

formule (2),

$$C.y^{(r+2s)} = C.\frac{d^s y^{(r+s)}}{dx^s} = \frac{d^r C.y^{(r+s)}}{dx^r} - (s,1)\frac{d^{r+s-1}C'y^{(r+s)}}{dx^{r+s-1}} + (s,2)\frac{d^{r+s-2}C.y^{(r+s)}}{dx^{r+s-2}} - \ldots,$$

d'où

$$\frac{d^r.C.y^{(r+2s)}}{dx^r} = \frac{d^{r+s}.C.y^{(r+s)}}{dx^{r+s}} - (s,1)\frac{d^{r+s-1}C'y^{(r+s)}}{dx^{r+s-1}} + (s,2)\frac{d^{r+s-2}C'.y^{(r+s)}}{dx^{r+s-2}}$$
$$- (s,3)\frac{d^{r+s-3}C''y^{(r+s)}}{dx^{r+s-3}} + (s,4)\frac{d^{r+s-4}C^{\text{IV}}y^{(r+s)}}{dx^{r+s-4}} - \ldots;$$

mais on a

$$C''.y^{(r+s)} = \frac{dC'.y^{(r+s-1)}}{dx} - C''.y^{(r+s-1)}.$$

$$C'''.y^{(r+s)} = \frac{dC'''y^{(r+s-1)}}{dx} - C^{\text{IV}}.y^{(r+s-1)}.$$

. . . . . .

Substituant dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{d^r C.y^{(r+2s)}}{dx^r} = \frac{d^{r+s}C.y^{(r+s)}}{dx^{r+s}} - (s,1)\frac{d^{r+s-1}C'y^{(r+s)}}{dx^{r+s-1}} + (s,2)\frac{d^{r+s-1}C'.y^{(r+s-1)}}{dx^{r+s-1}}$$
$$-[(s,3)+(s,2)]\frac{d^{r+s-2}C.y^{(r+s-1)}}{dx^{r+s-2}} + [(s,4)+(s,3)]\frac{d^{r+s-3}C^{\text{IV}}y^{(r+s-1)}}{dx^{r+s-3}} - \ldots;$$

on aura encore

$$C^{\text{IV}}.y^{(r+s-1)} = \frac{dC^{\text{IV}}y^{(r+s-2)}}{dx} - C^{\text{V}}.y^{(r+s-2)}.$$

$$C^{\text{V}}.y^{(r+s-1)} = \frac{dC^{\text{V}}y^{(r+s-2)}}{dx} - C^{\text{VI}}.y^{(r+s-2)}.$$

. . . . . .

Substituant encore dans l'équation précédente, et continuant toujours de la même manière, on finira par mettre $\frac{d^r C.y^{(r+2s)}}{dx^r}$ sous une forme telle, que dans chaque terme l'ordre de la dérivée de y soit égal à

l'indice du signe d, ou égal à cet indice augmenté d'une unité. De plus il est facile de voir qu'un terme quelconque, dans lequel l'ordre de la dérivée de y dépasse d'une unité l'indice du signe d, est de la forme

$$-N\frac{d^{r+i-h-1}(C^{(2h+1)}y^{(r+s-h)})}{dx^{r+i-h-1}},$$

N étant égal à

$$(s,2h+1)(s,2h)+(h,1)(s,2h)(s,2h-1)+\ldots$$
$$+(h,h-1)(s,h+2)(s,h+1)$$

Transformons également la quantité $\frac{d^{r+i}.Cy^{(r)}}{dx^{r+i}}$. Nous aurons d'abord

$$\frac{d.C.y}{dx}=C.y^{(r+s)}+(s,1)C'.y^{(r+s-1)}+(s,2)C''.y^{(r+s-2)}$$
$$+(s,3)C'''.y^{(r+s-3)}+\ldots$$

d'où

$$\frac{d^{r+i}.C.y^{(r)}}{dx^{r+i}}=\frac{d^{r+i}.Cy^{(r+}}{dx^{r+i}}+(s,1)\frac{d^{r+i}.C'y^{(r+s-1)}}{dx^{r+i}}+(s,2)\frac{d^{r+i}.C''y^{(r+i-2)}}{dx^{r+i}}$$
$$+(s,3)\frac{d^{r+i}.C'''y^{(r+i-3)}}{dx^{r+i}}+(s,4)\frac{d^{r+i}.C^{IV}y^{(r+i-4)}}{dx^{r+i}}+\ldots;$$

mais on a

$$\frac{d.C'y^{(r+i-1)}}{dx}=C'.y^{(r+s)}+C.y^{(r+s-1)},$$
$$\frac{d.C''y^{(r+i-2)}}{dx}=C''.y^{(r+s-1)}+C.y^{(r+s-2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituant dans l'équation précédente, on trouvera

$$\frac{d^{r+i}.Cy^{(r)}}{dx^{r+i}}=\frac{d^{r+i}.Cy^{(r+i)}}{dx^{r+i}}+(s,1)\frac{d^{r+i-1}.Cy^{(r+}}{dx^{r+i-1}}+[(s,2)+(s,1)]\frac{d^{r+i-1}.C.y^{(r+i-1)}}{dx^{r+i-1}}$$
$$+[(s,3)+(s,2)]\frac{d^{r+i-1}.C'y^{(r+i-1)}}{dx^{r+i-1}}+[(s,4)+(s,3)]\frac{d^{r+i-1}.C''y^{(r+i-1)}}{dx^{r+i-1}}+\ldots;$$

on a encore

$$\frac{d.C'''y^{(r+s-2)}}{dx} = C'''y^{(r+s-1)} + C^{\text{IV}}y^{(r+s-2)},$$

$$\frac{d.C^{\text{IV}}y^{(r+s-3)}}{dx} = C^{\text{IV}}y^{(r+s-2)} + C^{\text{V}}y^{(r+s-3)},$$

.....

Si l'on substitue de nouveau dans l'équation précédente, et qu'on continue toujours de la meme manière, on finira par mettre $\frac{d^{r+2s}Cy^{(r)}}{dx^{r+2s}}$ sous la même forme que $\frac{d^rCy^{(r+2s)}}{dx^r}$, et, comme il est facile de le voir, un quelconque des termes dans lesquels l'ordre de la dérivée de y dépassera d'une unité l'indice du signe d, sera de la forme

$$N\frac{d^{r+s-h-1}C^{2h+1}y^{(r+s-h)}}{dx^{r+s-h-1}},$$

N étant le même que précédemment; donc la somme

$$\frac{d^r.Cy^{(r+2s)}}{dx^r} + \frac{d^{r+2s}Cy^{(r)}}{dx^{r+2s}}$$

ne contiendra que des termes où l'ordre de la dérivée de y sera égal à l'indice du signe d, puisque les autres se détruisent deux à deux.

Dans le cas où t serait impair et égal à $2s+1$, nous verrions de la même manière que la différence

$$\frac{d^r.Cy^{(r+2s+1)}}{dx^r} - \frac{d^{r+2s+1}.Cy^{(r)}}{dx^{r+2s+1}}$$

ne contiendrait que des termes dans lesquels l'ordre de la dérivée de y serait égal à l'indice du signe d; donc chacune des deux quantités

$$u\frac{d^m.A_{m+1}uy^{(m)}}{dx^m}, \quad uy\frac{d^m.A_m u^{(m)}}{dx^m},$$

dont se compose X, peut se mettre sous la forme

$$b_0 y + \frac{d.b_1 y'}{dx} + \frac{d^2 b_2 y''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^m . b_{m-1} y^{(m)}}{dx^m};$$

et comme X est une dérivée exacte, quel que soit y, b_0 sera le même dans ces deux quantités : donc enfin X prendra la forme

$$\frac{d.b_1 y'}{dx} + \frac{d^2 b_2 y''}{dx^2} + \frac{d^3 b_3 y'''}{dx^3} + \ldots + \frac{d^m b_{m-1} y^{(m)}}{dx^m}. \qquad C. Q. F. D.$$

On pourrait facilement déduire de ce qui précède l'expression générale des fonctions B; mais cette expression serait très-compliquée, et il vaudra mieux les calculer dans chaque cas particulier, en transformant directement chacun des groupes X qui entreront dans la valeur de U, après l'avoir mis sous la forme qui résulte de la formule (2) : cette forme est

$$X = \frac{d^m . A_m[u(uy)^{(m)} - u y u^{(m)}]}{dx^m} - m.1 \frac{d^{m-1} A_m[u' u y^{(m)} - (uy)' u^{(m)}]}{dx^{m-1}}$$
$$+ (m.2 \frac{d^{m-2} A_m[u'' (u y)^{(m)} - (uy)'' u^{(m)}]}{dx^{m-2}} - \ldots$$

On trouvera ainsi, pour $n = 1$,

$$\int U dx = u^2 A_1 y';$$

pour $n = 2$,

$$\int U dx = [2 u'u' A_2'' + 2 u u'' A_2 - 4 u'^2 A_2 + u^2 A_1] y' + \frac{d.u^2 A_2 y'}{dx};$$

pour $n = 3$,

$$\int U dx = [3 u u' A_3'' + 3 u u'' A_3' - 9 u' u'' A_3' - 6 u' u A_3 + 9 u'^2 A$$
$$+ 2(u u' A_2' + 2 u u'' A_2 - 4 u'^2 A_2 + u^2 A_1] y'$$
$$+ \frac{d.[3 u u' A_3' + 6 u u'' A_3 - 9 u'^2 A_3 + u^2 A_2] y'}{dx} + \frac{d^2 u^2 A_3 y'}{dx^2}$$

§ II.

Distinction des maxima et des minima des intégrales définies.

Soit $\int_{x_0}^{x_1} K\,dx$ une intégrale définie, dans laquelle K est une fonction donnée de x, y et des dérivées y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$. Si l'on établit entre y et x diverses relations, représentant autant de courbes dont ces variables seront les coordonnées, l'intégrale proposée prendra diverses valeurs, et, pour déterminer celle de toutes ces courbes qui rendra l'intégrale un maximum ou un minimum, il faudra égaler à zéro la variation première de cette intégrale.

Pour distinguer ensuite si la relation trouvée entre y et x correspond à un maximum, ou bien à un minimum, on devra considérer la variation seconde de l'intégrale, et chercher si elle reste constamment positive ou constamment négative, entre les limites de l'intégrale, quelles que soient les valeurs des variations arbitraires qui y entrent. Mais la question se décompose évidemment en deux parties : dans la première, on peut se proposer de reconnaître si la courbe trouvée est de nature à rendre l'intégrale un maximum, ou bien un minimum, indépendamment de toute valeur attribuée aux constantes qui entrent dans son équation; dans la seconde, on recherchera si les valeurs particulières attribuées à ces constantes rendent l'intégrale plus grande ou plus petite que toutes les autres valeurs, très-peu différentes de celles-là, qu'on pourrait donner à ces constantes. Cette seconde partie de la question rentrant entièrement dans la distinction des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes, je ne m'occuperai que de la première partie, et je me contenterai, en conséquence, de chercher si l'intégrale proposée est un maximum, ou un minimum, en ne changeant que la forme de la courbe, sans faire varier les valeurs de x, y, y', y'',..., $y^{(n-1)}$ relatives aux deux limites.

Puisque nous supposons x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ constants aux deux limites, la variation première de l'intégrale se réduira à

$\int_{x_0}^{x_1} V\,\delta y\,dx$, V étant égal à

$$\left(\frac{dK}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{dK}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{dK}{dy''}\right)}{dx^2} - \frac{d^3\left(\frac{dK}{dy'''}\right)}{dx^3} + \ldots \pm \frac{d^n\left(\frac{dK}{dy^{(n)}}\right)}{dx^n},$$

et

$$\left(\frac{dK}{dy}\right),\ \left(\frac{dK}{dy'}\right),\ \left(\frac{dK}{dy''}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{dK}{dy^{(n)}}\right),$$

représentant les coefficients différentiels partiels de K pris relativement à y, y', y'', ..., $y^{(n)}$. Ainsi $V = 0$ sera l'équation différentielle de la courbe qui rend l'intégrale proposée un maximum ou un minimum.

La variation seconde de cette intégrale prendra alors la forme $\int_{x_0}^{x_1} \delta V\,\delta y\,dx$. Je dis maintenant que δV peut toujours se mettre sous la forme du premier membre de l'équation (1) : en effet on a

$$\begin{aligned}
\delta V = {} & \left(\frac{d^2K}{dy^2}\right)\delta y + \left(\frac{d^2K}{dy\,dy'}\right)\delta y' + \left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)\delta y'' + \ldots + \left(\frac{d^2K}{dy\,dy^{(n)}}\right)\delta y^{(n)} \\
& - \frac{d\left[\left(\frac{d^2K}{dy\,dy'}\right)\delta y + \left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)\delta y' + \left(\frac{d^2K}{dy'\,dy''}\right)\delta y'' + \ldots + \left(\frac{d^2K}{dy'\,dy^{(n)}}\right)\delta y^{(n)}\right]}{dx} \\
& + \frac{d^2\left[\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)\delta y + \left(\frac{d^2K}{dy'\,dy''}\right)\delta y' + \left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\delta y'' + \ldots + \left(\frac{d^2K}{dy''\,dy^{(n)}}\right)\delta y^{(n)}\right]}{dx^2} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \pm \frac{d^n\left[\left(\frac{d^2K}{dy\,dy^{(n)}}\right)\delta y + \left(\frac{d^2K}{dy'\,dy^{(n)}}\right)\delta y' + \left(\frac{d^2K}{dy''\,dy^{(n)}}\right)\delta y'' + \ldots + \left(\frac{d^2K}{dy^{(n)2}}\right)\delta y^{(n)}\right]}{dx^n}:
\end{aligned}$$

or il est facile de voir que tous les termes de cette expression, excepté ceux où l'ordre de la dérivée de δy est égal à l'indice du signe d, peuvent se grouper deux à deux, de manière que chaque groupe soit compris dans la forme générale

$$\pm\left[\frac{d^r C\,\delta y^{(r+1)}}{dx^r} \pm \frac{d^{r+1} C\,\delta y^{(r)}}{dx^{r+1}}\right],$$

le signe du second terme, dans la parenthèse, étant $+$ si t est pair et $-$ si t est impair. Mais, comme nous l'avons vu (pages 214 et suiv.), cette quantité peut être transformée de manière que dans chaque terme l'ordre de la dérivée de δy soit égal à l'indice du signe d : donc δV pourra se mettre sous la forme

$$\delta V = A\delta y + \frac{d.A_1\delta y'}{dx} + \frac{d^2.A_2\delta y''}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n.A_n\delta y^{(n)}}{dx^n}.$$

De plus, il est facile de voir que l'on a

$$A_n = \pm\left(\frac{d^2K}{dy^{(n)2}}\right),$$

le signe $+$ ayant lieu si n est pair, et le signe $-$ si n est impair.

Si l'on suppose qu'on ait intégré l'équation différentielle $V = 0$, et qu'on en ait tiré la valeur de y en fonction de x et de $2n$ constantes arbitraires $a, b, c, \ldots$, on trouvera facilement l'intégrale de l'équation $\delta V = 0$; en effet, si dans la valeur de y on augmente chacune des constantes $a, b, c, \ldots$ de $\delta a, \delta b, \delta c, \ldots$, y augmentera de

$$\delta y = \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \frac{dy}{dc}\delta c + \ldots.$$

et V deviendra $V + \delta V$; mais la nouvelle valeur de y ne différant de la première que par les constantes arbitraires, devra annuler $V + \delta V$, et cela, quelles que soient les quantités $\delta a, \delta b, \delta c, \ldots$; donc l'équation $\delta V = 0$ sera satisfaite par

$$\delta y = \alpha\frac{dy}{da} + \beta\frac{dy}{db} + \gamma\frac{dy}{dc} + \ldots.$$

et cette valeur de δy contenant $2n$ constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, en est l'intégrale complète.

Je vais tâcher maintenant de mettre la variation seconde sous une forme convenable pour en déduire les caractères distinctifs des maxima et des minima de l'intégrale proposée, et, la marche à suivre pour cela étant très-uniforme, je me contenterai d'effectuer la transformation dans les cas les plus simples.

Je suppose d'abord que K ne contienne que x, y, et y'; d'après ce qui précède, δV pourra s'écrire

$$\delta V = A\delta y + \frac{d.A_1\delta y'}{dx}.$$

Soit

$$u = \alpha\frac{dy}{da} + \beta\frac{dy}{db};$$

δV sera annulé par $\delta y = u$; donc si l'on pose

$$\delta y = u\delta' y,$$

$u\delta V$ deviendra une dérivée exacte, d'après le théorème démontré précédemment, et si l'on intègre par parties, on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta V\delta y\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u\delta V\delta' y\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} B(\delta' y')^2 dx,$$

en remarquant que δy est nul aux deux limites. D'ailleurs on a

$$B = u^2 A_1 = -u^2\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right).$$

et la relation $\delta y = u\delta' y$ donne

$$\delta' y' = \frac{\delta y'}{u} - \frac{u'\delta y}{u^2};$$

on a donc

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \delta V\delta y\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)\left(\frac{u'\delta y}{u} - \delta y'\right)^2 dx.$$

L'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} K dx$ sera donc un maximum ou un minimum, suivant que, pour la valeur de y tirée de l'équation $V = 0$, la quantité $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)$ sera toujours négative ou toujours positive entre les limites de l'intégrale; il faudra de plus qu'on puisse déterminer α et β de

manière que $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)\left(\frac{u'\delta y}{u} - \delta y'\right)^2$ ne devienne pas infini entre ces limites. Si $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)$ ne conservait pas constamment le même signe, la variation seconde pourrait être tantôt positive, tantôt négative, suivant les valeurs qu'on donnerait à δy, et il n'y aurait ni maximum ni minimum.

Je suppose maintenant que la plus haute dérivée de y qui entre dans K soit y''; δV se mettra sous la forme

$$\delta V = A\delta y + \frac{d.A_1\delta y'}{dx} + \frac{d^2A_2\delta y''}{dx^2}.$$

Soient

$$u = \alpha\frac{dy}{da} + \beta\frac{dy}{db} + \gamma\frac{dy}{dc} + \delta\frac{dy}{dd},$$

$$u_1 = \alpha_1\frac{dy}{da} + \beta_1\frac{dy}{db} + \gamma_1\frac{dy}{dc} + \delta_1\frac{dy}{dd}.$$

δV sera annulé si l'on fait $\delta y = u$, ou bien $\delta y = u_1$; posons $\delta y = u\delta' y$, et nous aurons, en intégrant par parties,

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta V\delta y\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u\delta V\delta' y\,dx = -\int_{x_0}^{x_1}\left(B\delta' y' + \frac{dB_1\delta' y''}{dx}\right)\delta' y'\,dx;$$

or δV étant annulé par $\delta y = u_1$, $B\delta' y' + \frac{d.B_1\delta' y''}{dx}$ doit être annulé en y faisant $\delta' y = \frac{u_1}{u}$, ou bien $\delta' y' = \frac{uu'_1 - u_1u'}{u^2}$; si donc nous posons $\delta' y' = \frac{uu'_1 - u_1u'}{u^2}\delta'' y$, nous aurons, en intégrant de nouveau par parties,

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta V\delta y\,dx = \int_{x_0}^{x_1} C(\delta'' y')^2\,dx;$$

mais on a $C = \left(\frac{uu'_1 - u_1u'}{u^2}\right)^2 B_1$ et $B_1 = u^2A_2 = u^2\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)$; d'un autre

côté, les relations $\delta y = u\delta' y$, $\delta' y' = \frac{uu_1 - u_1 u'}{u^2}\delta'' y$, donnent

$$\delta'' y' = \frac{u}{uu_1 - u_1 u'}\left(\delta y'' - \frac{uu_1'' - u_1 u''}{uu_1' - u_1 u'}\delta y' + \frac{u'u_1'' - u_1' u''}{uu_1' - u_1 u'}\delta y\right):$$

on aura donc

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta V \delta y dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2 K}{dy''^2}\right)\left(\frac{u'u_1'' - u_1' u''}{uu_1' - u_1 u'}\delta y - \frac{uu_1'' - u_1 u''}{uu_1' - u_1 u'}\delta y' + \delta y''\right)^2 dx.$$

Ainsi, dans ce cas, pour que $\int_x^{x_1} K dx$ soit un maximum ou un minimum, il faut que $\left(\frac{d^2 K}{dy''^2}\right)$ reste constamment négatif ou constamment positif entre les limites x_0 et x_1; il faut de plus qu'on puisse déterminer les constantes α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1, δ_1, de manière que l'élément de l'intégrale dans la variation seconde ne devienne pas infini entre les mêmes limites.

Il est facile de déduire de ce qui précède, qu'en général, si $y^{(n)}$ est la dérivée de y de l'ordre le plus élevé qui entre dans K, l'intégrale $\int_x^{x_1} K dx$ sera un maximum ou un minimum, si $\left(\frac{d^2 K}{dy^{(n)2}}\right)$ reste constamment négatif ou constamment positif entre les limites x_0 et x_1, pourvu qu'on puisse déterminer les valeurs des constantes arbitraires qui entrent dans l'élément de la variation seconde, de manière que cet élément ne devienne pas infini entre les mêmes limites.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les maxima et les minima absolus des intégrales définies; voyons maintenant comment la même méthode peut s'appliquer à la distinction des maxima et des minima relatifs.

Soit donc $\int_x^{x_1} K dx$ une intégrale qu'il s'agit de rendre maximum ou minimum, en même temps que l'intégrale $\int_x^{x_1} L dx$ conserve une valeur constante. Si $\int_x^{x_1} V \delta y dx$ est la variation première de $\int_x^{x_1} K dx$,

la condition de maximum ou de minimum sera

$$\int_{x_0}^{x_1} V\delta y\,dx = 0.$$

Ici les δy qui entrent dans les différents termes de cette somme ne sont pas indépendants les uns des autres, mais ils sont assujétis à conserver à $\int_{x_0}^{x_1} L\,dx$ une valeur constante, c'est-à-dire à annuler la variation première de cette intégrale; en sorte que, si $\int_{x_0}^{x_1} U\delta y\,dx$ est cette variation première, ils devront satisfaire à l'équation de condition

$$\int_{x_0}^{x_1} U\delta y\,dx = 0.$$

Pour tenir compte de cette équation, on la multipliera par un facteur indéterminé m, et on l'ajoutera à l'équation précédente, ce qui donnera

$$\int_{x_0}^{x_1} (V + mU)\,\delta y\,dx = 0;$$

déterminant ensuite m de manière à faire disparaître le coefficient d'un des δy, on substituera sa valeur dans les coefficients des autres δy, et l'on égalera ces coefficients à zéro. On aura ainsi l'équation

$$V + mU = 0,$$

par laquelle la relation cherchée entre y et x sera déterminée. Il faudra se rappeler que m est une constante donnée par la relation

$$V_\omega + mU_\omega = 0,$$

V_ω et U_ω étant ce que deviennent V et U lorsqu'on y remplace x par la valeur particulière x_ω, et y, y', y'',... par les valeurs correspondantes y_ω, y'_ω, y''_ω,....

Passons maintenant à la distinction des maxima et des minima. La variation seconde de l'intégrale $\int_{x}^{x_1} K dx$ sera

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta V \delta y dx + \int_{x}^{x_1} V \delta^2 y dx;$$

mais pour que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} L dx$ reste constante, les δy et $\delta^2 y$ doivent annuler les variations première et seconde de cette intégrale, c'est-à-dire qu'ils doivent satisfaire aux équations

$$\int_{x}^{x_1} U \delta y dx = 0, \quad \int_{x}^{x_1} \delta U \delta y dx + \int_{x}^{x_1} U \delta^2 y dx = 0.$$

Si l'on ajoute cette dernière équation multipliée par m à la variation seconde de l'intégrale proposée, elle deviendra

$$\int_{x_0}^{x_1} (\delta V + m \delta U) \delta y dx + \int_{x}^{x_1} (V + m U) \delta^2 y dx;$$

mais m ayant la même valeur que précédemment, on a identiquement $V_0 + m U_0 = 0$, et pour toutes les autres valeurs de $x, y, y', y'' \ldots$ $V + mU$ est nul en vertu de la relation trouvée entre y et x; donc, en tenant compte de cette relation, la variation seconde se réduira à

$$\int_{x}^{x_1} (\delta V + m \delta U) \delta y dx.$$

Si l'on remarque maintenant que, m étant constant, on a

$$\delta V + m \delta U = \delta (V + mU),$$

on pourra transformer l'expression de cette variation seconde d'après la méthode exposée précédemment, en supposant connue l'intégrale de l'équation différentielle $V + mU = 0$, et faisant varier les constantes arbitraires qui entrent dans cette intégrale. Après la transformation,

l'élément de la variation seconde contiendra en facteur..... $\left(\frac{d^2K}{dy^{(n)2}}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy^{(n)2}}\right)$, $y^{(n)}$ étant la dérivée de y de l'ordre le plus élevé qui entre dans $K + mL$; si δy était arbitraire, il faudrait que ce facteur fût constamment négatif ou constamment positif entre les limites x_0 et x_1, pour que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} K dx$ fût un maximum ou un minimum; mais δy étant assujéti à satisfaire à l'équation

$$\int_{x_0}^{x_1} U \delta y \, dx = 0,$$

on conçoit que la variation seconde peut conserver toujours le même signe pour toutes les valeurs possibles de δy, sans que ses éléments soient tous de même signe. Ainsi, de ce que $\left(\frac{d^2K}{dy^{(n)2}}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy^{(n)2}}\right)$ changerait de signe entre les limites x_0 et x_1, on ne devrait pas conclure que l'intégrale proposée ne serait ni un maximum ni un minimum; mais si, remplaçant m par sa valeur $-\frac{V_0}{U_0}$, on peut trouver pour x_0 une valeur telle que $\left(\frac{d^2K}{dy^{(n)2}}\right) - \frac{V_0}{U_0}\left(\frac{d^2L}{dy^{(n)2}}\right)$ reste constamment négatif ou constamment positif entre les limites x_0 et x_1, on sera certain que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} K dx$ sera un maximum ou un minimum, pourvu toujours que l'élément de la variation seconde ne devienne pas infini entre les mêmes limites.

§ III.

Application de la théorie précédente à quelques exemples.

1°. *Plus courte ligne entre deux points.*

La longueur d'une courbe, prise entre deux de ses points ayant pour abscisses x_0 et x_1, est exprimée par l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+y'^2}$; si l'on cherche la relation qui doit exister entre y et x pour que cette

intégrale soit un minimum, on trouve l'équation

$$y = ax + b,$$

a et b étant deux constantes arbitraires: donc la plus courte ligne entre deux points est une ligne droite. Il est clair que la valeur précédente de y rendra toujours l'intégrale proposée un minimum : nous allons voir si la considération de la variation seconde nous conduira à la même conclusion.

D'abord, K étant égal à $\sqrt{1+y'^2}$, on a

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) = \frac{1}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}};$$

mais la valeur de y donne $y' = a$: on a donc

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) = \frac{1}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}},$$

quantité constante et positive.

De plus, on a $\frac{dy}{da} = x$, $\frac{dy}{db} = 1$; d'où $u = \alpha x + \beta$ et $u' = \alpha$: la quantité

$$\frac{u'\delta y}{u} - \delta y'$$

de la formule (3) devient donc

$$\frac{\alpha\delta y}{\alpha x + \beta} - \delta y',$$

et si l'on prend α et β de manière que $-\frac{\beta}{\alpha}$ ne soit pas compris entre x_0 et x_1, cette quantité ne deviendra pas infinie entre les limites de l'intégrale. Donc la théorie précédente nous indique que la valeur trouvée pour y rend toujours l'intégrale proposée un minimum.

Je remarquerai ici qu'on pourrait faire $\alpha = 0$ dans la valeur de u, et alors la variation seconde se réduirait à

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) (\delta y')^2 dx :$$

il en sera de même toutes les fois que, K ne contenant que la dérivée y', V ne contiendra pas y. En effet, δV étant mis sous la forme du premier membre de l'équation (1), ne contiendra pas de terme en δy, et sera par conséquent une dérivée exacte; on pourra donc appliquer de suite le procédé de l'intégration par parties, et la variation seconde prendra la forme précédente. Il résulte de là que, toutes les fois que K ne contiendra que la dérivée y', et ne renfermera pas y, pour reconnaître si l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} K\, dx$ est un maximum ou un minimum, il suffira de voir si $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)$ reste constamment négatif ou constamment positif entre les limites x_0 et x_1, et s'il ne devient pas infini entre les mêmes limites.

2°. *Brachystochrone.*

Dans le problème de la brachystochrone ou courbe de plus vite descente dans le vide, on se propose de trouver la courbe que doit suivre un mobile pesant pour aller dans le temps le plus court possible d'un point à un autre. Puisque nous supposons les limites fixes, nous pouvons toujours prendre pour axe coordonné horizontal une droite telle que la distance du point de départ du mobile à cette droite soit la hauteur génératrice de sa vitesse initiale; si cette vitesse est nulle, l'axe passera par le point de départ. De plus, contre l'ordinaire, nous prendrons l'axe vertical pour axe des ordonnées, afin que, dans tous les cas, la portion de courbe cherchée soit tout entière comprise entre les deux limites de l'intégrale. Les ordonnées seront comptées dans le sens de la pesanteur.

Cela posé, l'intégrale qu'il s'agit de rendre minimum sera

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\, dx;$$

la condition de minimum conduit à l'équation différentielle

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} + b,$$

a et b étant deux constantes arbitraires. Cette équation est celle d'une cycloïde dont la base est sur l'axe des x; a est le rayon du cercle générateur, et b est la distance de l'origine de la cycloïde à l'origine des coordonnées.

Considérons maintenant la variation seconde de l'intégrale. Nous aurons d'abord

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{K}{(1+y'^2)^2};$$

or la cycloïde trouvée n'étant jamais rencontrée qu'en un point par une parallèle à l'axe des y, dx doit être considéré comme positif dans toute l'étendue de l'intégrale; d'ailleurs tous les éléments de l'intégrale sont positifs : donc K est toujours positif, et par conséquent $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)$ l'est aussi; donc enfin l'intégrale proposée est un minimum, pourvu que l'élément de la variation seconde ne devienne pas infini entre les limites x_0 et x_1. Voyons dans quels cas cette dernière condition pourra être remplie.

On tire de l'équation de la cycloïde

$$\frac{dy}{da} = \frac{1}{a}\left[y - (x-b)\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}\right] = \frac{y - (x-b)y'}{a};$$

$$\frac{dy}{db} = -\sqrt{\frac{2a}{y} - 1} = -y';$$

on a donc

$$u = \alpha\,\frac{y-(x-b)y'}{a} - \beta y';$$

on en déduit

$$u' = -\alpha\frac{(x-b)y''}{a} - \beta y'' = \alpha\frac{x-b}{y^2} + \beta\frac{a}{y^2},$$

d'où

$$\frac{u'}{u} = \frac{a[\alpha(x-b)+\beta a]}{y^2[\alpha y - \alpha(x-b)y' - \beta a y']};$$

et si l'on fait $\beta = 0$, cette valeur deviendra

$$\frac{u'}{u} = \frac{a(x-b)}{y^2[y-(x-b)y']}.$$

Menons par l'origine de la cycloïde une parallèle à la tangente au point de cette courbe dont l'abscisse est x; l'ordonnée de cette parallèle pour la même abscisse x sera $(x-b)y'$, et il est facile de voir que tant que x sera compris entre b et $b+2\pi a$, nous aurons

$$y > (x-b)y';$$

donc si les deux points limites sont sur une même branche de la cycloïde, $\frac{u'}{u}$ ne deviendra pas infini entre ces limites, et comme il en sera de même de $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)$, il s'ensuit que dans ce cas l'intégrale proposée sera toujours un minimum.

Si les points limites étaient sur deux branches de la cycloïde, entre ces deux limites y deviendrait nul, et $\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)\left(\frac{u'\delta y}{u} - \delta y'\right)^2$ deviendrait infini, quels que soient α et β : donc dans ce cas la méthode n'indiquerait plus rien.

Les deux exemples qui précèdent suffisent pour faire voir comment la méthode de M. Jacobi s'applique à la distinction des maxima et minima absolus; nous allons voir maintenant deux autres exemples, dans

lesquels la même méthode sera appliquée à la distinction des maxima et minima relatifs.

3°. *Courbe de longueur donnée comprenant une aire maximum ou minimum.*

L'intégrale qui doit être rendue maximum ou minimum est $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$, et en même temps l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ doit conserver une valeur constante.

L'équation différentielle de la courbe cherchée est donc

$$1 - m\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

m étant une constante déterminée par la relation

$$1 - m\frac{y''_0}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Ainsi l'équation de la courbe sera

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = m^2.$$

c'est-à-dire que cette courbe est un cercle. Si maintenant on détermine a, b et m de manière que ce cercle passe par les deux points limites donnés, et que la longueur de l'arc compris entre ces deux points soit égale à une ligne donnée, on trouvera que le cercle peut être placé de deux manières, ou, ce qui revient au même, que le problème a deux solutions : l'un des deux arcs de cercle satisfaisant aux conditions précédentes, tourne sa concavité vers l'axe des x, et l'autre sa convexité. Or, d'après la remarque de la page 228, la variation seconde de l'intégrale proposée peut se mettre sous la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy'^2}\right)\right](\delta y')^2\,dx.$$

et puisque l'on a $K = y$, $L = \sqrt{1 + y'^2}$, on aura

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy'^2}\right) = m.\frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, remplaçant m par sa valeur,

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy'^2}\right) = \frac{(1 + y'_\omega)^{\frac{3}{2}}}{y''_\omega(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression ne peut pas devenir infinie entre les limites de l'intégrale; de plus, elle est négative pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites, si l'on prend le premier des deux arcs de cercle déterminés précédemment, et positive si l'on prend le second; donc le premier rend l'intégrale proposée maximum, et le second la rend minimum.

4°. *Courbe de longueur donnée ayant son centre de gravité le plus haut ou le plus bas possible.*

L'intégrale qu'on doit rendre maximum ou minimum est..... $\int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$, et en même temps il faut que $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ reste constant. L'équation de la courbe cherchée sera donc

$$1 + y'^2 - (y + m)\,y'' = 0,$$

et l'on aura pour déterminer la constante m, la relation

$$1 + y'^2_\omega - (y'_\omega + m)\,y''_\omega = 0.$$

L'intégrale de l'équation différentielle précédente est

$$y + m = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{b}e^{\frac{x}{a}} + be^{-\frac{x}{a}}\right).$$

c'est-a-dire que la courbe cherchée est une chaînette dont l'axe est vertical. Si l'on détermine les constantes a, b et m, on trouve, comme dans l'exemple précédent, que deux arcs de chaînette satisferont aux conditions : l'un de ces arcs tourne sa concavité vers l'axe des x, et l'autre sa convexité. Voyons maintenant ce qu'indique la variation seconde de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$; on a $K = y\sqrt{1+y'^2}$, $L = \sqrt{1+y'^2}$; on en déduit

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy'^2}\right) = \frac{y+m}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien, en remplaçant m par sa valeur,

$$\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + m\left(\frac{d^2L}{dy'^2}\right) = \frac{y - y_\omega + \frac{1+y_\omega'^2}{y_\omega''}}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le cas de l'arc de chaînette qui tourne sa concavité vers l'axe des x, prenons pour y_ω, y'_ω, y''_ω les valeurs de y, y', y'' relatives au point de cet arc qui est le plus loin de l'axe des x; l'expression précédente sera négative et l'intégrale proposée sera un maximum. Dans le cas de l'arc qui tourne sa convexité vers l'axe des x, on verrait de la même manière que l'intégrale proposée est un minimum.

Mais les conclusions précédentes supposent que l'élément de la variation seconde ne devient pas infini entre les limites x_0 et x_1 : voyons si cela peut toujours avoir lieu. On trouve facilement

$$\frac{dy}{da} = \frac{y+m}{a} - \frac{x}{a}y', \quad \frac{dy}{db} = -\frac{a}{b}y',$$

ce qui donne

$$u = \alpha\left(\frac{y+m}{a} - \frac{x}{a}y'\right) - \beta\frac{a}{b}y',$$

et par suite

$$u' = -\left(\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{a}{b}\right) y'';$$

or il est facile de voir qu'on ne peut pas toujours déterminer $\frac{\alpha}{\beta}$ de manière que $\frac{u'}{u}$ ne devienne pas infini entre x_0 et x_1 : quand cette détermination est impossible, la méthode précédente ne conduit à aucune conclusion précise.

Addition à la thèse précédente.

En comparant la méthode exposée dans cette thèse à celle de Legendre, on trouve facilement les intégrales des équations différentielles auxquelles il avait ramené la question. Je ne considérerai pour cela que le dernier cas dont je me suis occupé, c'est-à-dire celui où K est fonction de x, y, y', y''.

La variation seconde de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}\, dx$ étant égale à

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left[\begin{array}{c} \left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy^2}\right) \delta y^2 + 2\left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy\,dy'}\right) \delta y\, \delta y' + \left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy'^2}\right) \delta y'^2 \\ + 2\left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy\,dy''}\right) \delta y\, \delta y'' + 2\left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy'\,dy''}\right) \delta y'\, \delta y'' + \left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy''^2}\right) \delta y''^2 \end{array} \right].$$

Legendre décompose l'élément de cette variation seconde en deux parties, dont l'une soit immédiatement intégrable, et dont l'autre soit égale à $\left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy''^2}\right)$ multiplié par un carré parfait. Soit

$$\nu \delta y^2 + 2\nu_1 \delta y\, \delta y' + \nu_2 \delta y'^2$$

l'intégrale de la première partie, et

$$\left(\frac{d^2\mathrm{K}}{dy''^2}\right)(\lambda \delta y + \mu \delta y' + \delta y'')^2$$

la seconde partie; on a, pour déterminer v, v_1, v_2, λ, μ, les relations

$$\mu\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right) = \left(\frac{d^2K}{dy'dy''}\right) + v_2,$$

$$\lambda\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right) = \left(\frac{d^2K}{dydy''}\right) + v_1,$$

$$\mu^2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right) = \left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + 2v_1 + \frac{dv_2}{dx},$$

$$\lambda\mu\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right) = \left(\frac{d^2K}{dydy'}\right) + v + \frac{dv_1}{dx},$$

$$\lambda^2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right) = \left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) + \frac{dv}{dx}.$$

Si l'on élimine λ et μ entre ces relations, on trouve les équations suivantes, auxquelles doivent satisfaire v, v_1 et v_2 :

$$(4)\quad \begin{cases} \left[\left(\frac{d^2K}{dy'dy''}\right) + v_2\right]\left[\left(\frac{d^2K}{dydy''}\right) + v_1\right] = \left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\left[\left(\frac{d^2K}{dydy'}\right) + v + \frac{dv_1}{dx}\right], \\ \left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\left[\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right] = \left[\left(\frac{d^2K}{dy'dy''}\right) + v_2\right]^2, \\ \left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\left[\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) + \frac{dv}{dx}\right] = \left[\left(\frac{d^2K}{dydy''}\right) + v_1\right]^2. \end{cases}$$

Or, d'après la transformation que nous avons effectuée, nous aurons

$$\lambda = \frac{u'u''_1 - u'_1u''}{uu'_1 - u_1u'}, \quad \mu = -\frac{uu''_1 - u_1u''}{uu'_1 - u_1u'};$$

les valeurs de v, v_1, v_2 seront donc

$$v = -\frac{dv_1}{dx} - \left(\frac{d^2K}{dydy'}\right) - \left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)\frac{(uu''_1 - u_1u'')(u'u''_1 - u''_1u')}{uu'_1 - u_1u'},$$

$$v_1 = -\left(\frac{d^2K}{dydy''}\right) + \left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\frac{u'u'' - u'_1u''}{uu'_1 - u_1u'}$$

$$v_2 = -\left(\frac{d^2K}{dy'dy''}\right) - \left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\frac{uu''_1 - u_1u''}{uu'_1 - u_1u'}.$$

On reconnaît facilement que les quantités

$$uu_1 - u_1u', \quad uu'_1 - u_1u'', \quad u'u''_1 - u'_1u'$$

ne contiennent d'arbitraires que les six coefficients

$$\begin{aligned} &\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = m, \quad \alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1 = n, \quad \alpha\delta_1 - \delta\alpha_1 = p, \\ &\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 = r, \quad \beta\delta_1 - \delta\beta_1 = s, \quad \gamma\delta_1 - \delta\gamma_1 = t. \end{aligned}$$

Ces coefficients ayant entre eux la relation identique

$$mt - ns + pr = 0,$$

et leurs rapports seulement entrant dans les expressions précédentes de v, v_1, v_2, ces expressions contiennent quatre constantes arbitraires; mais les intégrales des équations (4) n'en doivent renfermer que trois : donc, pour que les valeurs précédentes de v, v_1, v_2 soient les intégrales de ces équations, il faut que les quantités m, n, p, r, s, t satisfassent à une autre condition que nous allons tâcher de trouver.

Pour cela substituons les valeurs de v, v_1, v_2 dans les équations (4) : la première sera satisfaite. Le premier membre de la seconde se réduira à

$$2\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right) - \left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + \left(\frac{d^2K}{dy'dy''}\right)' + \frac{1}{uu'_1 - u_1u'}\,\frac{d\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)(uu_1 - u_1u')}{dx} - \\ - 2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\frac{u'u'_1 - u'_1u''}{uu_1 - u_1u'}:$$

or δV peut dans ce cas se mettre sous la forme

$$\delta V = \left[\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2K}{dy\,dy'}\right)' + \left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)''\right]\delta y \\ + \frac{d.\left[2\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right) - \left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right) + \left(\frac{d^2K}{dy'dy''}\right)'\right]\delta y'}{dx} \\ + \frac{d^2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)\delta y''}{dx^2}.$$

On a donc les deux équations identiques

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{d^2K}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^2K}{dy\,dy'}\right)'+\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)''\right]u+\frac{d.\left[2\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)-\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dy'\,dy''}\right)'\right]u'}{dx}\\+\frac{d^2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)u''}{dx}\end{aligned}\right\}=0.$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{d^2K}{d^2K}\right)-\left(\frac{d^2K}{dy\,dy'}\right)'+\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)''\right]u_1+\frac{d.\left[2\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)-\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dy'\,dy''}\right)'\right]u_1}{dx}\\+\frac{d^2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)u''_1}{dx}\end{aligned}\right\}=0.$$

Multipliant la première par u_1, la seconde par u, et retranchant, on trouvera facilement

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\left[2\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)-\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dy'\,dy''}\right)'\right](uu_1-u_1u')}{dx}+\frac{d^2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)(uu_1-u_1u'')}{dx^2}\\-2\frac{d.\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)(u'u''-u_1u'')}{dx}\end{aligned}\right\}=0;$$

d'où, en intégrant,

$$\left.\begin{aligned}\left[2\left(\frac{d^2K}{dy\,dy''}\right)-\left(\frac{d^2K}{dy'^2}\right)+\left(\frac{d^2K}{dy'\,dy''}\right)'\right](uu_1-u_1u')+\frac{d\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)(uu''_1-u_1u'')}{dx}\\-2\left(\frac{d^2K}{dy''^2}\right)(u'u''_1-u'_1u''\end{aligned}\right\}=C.$$

Pour que la seconde des équations (4) soit satisfaite par les valeurs trouvées précédemment pour v, v_1, v_2, il faut donc qu'on ait $C = 0$. Or C est évidemment une fonction linéaire des quantités m, n, p, r, s, t: donc ces quantités devront être prises de manière à satisfaire à l'équation $C = 0$, et c'est la condition que nous voulions trouver.

Quant à la troisième des équations (4), on reconnaît facilement qu'elle est satisfaite par les mêmes valeurs de v, v_1, v_2, pourvu que la condition $C = 0$ soit remplie.

NOTE

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$;

Par M. Ossian BONNET,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

M. Poisson a donné, dans le dix-neuvième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les deux formules

$$(1)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos ax\, dx = \frac{1}{2^a}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \cos(a+2m)\, x\, dx = 0,$$

dans lesquelles a est un nombre positif quelconque, et m un nombre entier positif.

Je vais appliquer ces deux formules à la détermination de l'intégrale d'Euler

$$(2)\qquad A = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

où a est une constante positive et < 1.

En posant $x = \tang^2 y$, j'ai d'abord

$$3.\qquad A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} y \cos^{1-2a} y\, dy.$$

Maintenant, soit

$$1 - 2a > 0.$$

On sait que, y étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$2^a \cos\frac{a\pi}{2} \sin^a y = \cos ay - a\cos(a-2)y + \frac{a(a-1)}{1.2}\cos(a-4)y \ldots,$$

en se bornant à la valeur réelle et positive du premier membre. Changeant dans cette formule a en $2a-1$, nous en tirerons

$$\sin^{2a-1} y = \frac{1}{2^{a-1}\cos\frac{2a-1}{2}\pi}\left[\cos(2a-1)y - (2a-1)\cos(2a-3)y + \ldots\right].$$

Substituant cette valeur de $\sin^{2a-1} y$ dans la formule (3), il vient

$$A = \frac{1}{2^{2a-2}\sin a\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1-2a} y \cos(1-2a)y\,dy$$

$$-(2a-1)\frac{1}{2^{2a-2}\sin a\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1-2a} y \cos(2+1-2a)y\,dy \ldots\ldots$$

Or, d'après les formules ci-dessus, tous les termes du développement du second membre sont nuls, excepté le premier, qui est

$$\frac{\pi}{2^{2-2a}} \cdot \frac{1}{2^{2a-2}\sin a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc, dans le cas de $1-2a > 0$, on a

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^{2a-1} y\,dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Soit, en second lieu, $2a-1 > 0$. Je pose

$$y = \frac{\pi}{2} - y', \quad a = 1 - a'.$$

L'intégrale

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^{2a-1} y\,dy$$

devient

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^{2a'-1} y' dy'.$$

Mais $2a'-1$ étant >0, cette dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{\pi}{\sin a'\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

il en est donc de même de

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang}^{2a-1} y\, dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx,$$

dans le cas de $2a-1>0$.

D'ailleurs, dans le cas de $2a-1=0$, la formule à démontrer se vérifie aisément. Donc, dans tous les cas,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

ERRATA pour le Mémoire de M. Steiner. (Cahier d'avril.)

Page 113, ligne 14, *après* sphériques, *ajoutez* isoscèles

Page 160, ligne 12, et page 167, ligne 26, *au lieu de* arcs de cercle egaux, *lisez* arcs de cercles égaux, *ou bien* arcs de cercle à rayons égaux.

REMARQUES

SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DES AXES PERMANENTS DE ROTATION;

PAR G. GASCHEAU,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'Académie d'Orléans.

1. J'adopterai les définitions données par M. Ampère (tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, page 86) :

Un axe permanent, relatif à un point de sa direction, est une droite liée à un corps fixé en ce point, et telle que le mobile, ayant commencé à tourner autour de cette droite, le mouvement continue comme si elle était fixe, de sorte que les actions des forces centrifuges se détruisent mutuellement ;

Le centre de rotation d'un axe permanent est le point de sa direction qu'il suffit de fixer pour que le mouvement ait lieu autour de cette droite, conformément à la condition précédente ;

Un axe principal est un axe permanent relatif au centre de gravité ;

Un plan principal est un plan passant par deux axes principaux.

Dans un plan quelconque il existe un point tel que l'un des axes permanents relatifs à ce point est perpendiculaire au plan. On peut appeler le point dont il s'agit, *centre de rotation du plan*.

2. Quand on passe des propriétés mécaniques des axes permanents aux caractères analytiques qui servent à les déterminer, on arrive ordinairement à une définition triple : je veux dire que l'on trouve trois conditions qui fixent les positions des trois axes rectangulaires demandés. Mais dans la question de dynamique à laquelle se rattache la découverte des lignes dont il s'agit, il y a lieu de considérer l'un de ces

axes indépendamment des deux autres; il convient donc de pouvoir séparer les définitions, ou d'en établir une qui convienne à un seul axe permanent. J'emploierai la suivante, qui a l'avantage de manifester une propriété dont on ne trouve pas l'énoncé explicite dans les traités de mécanique rationnelle. Cette définition conduit directement aux équations des problèmes qui proposent de trouver les axes permanents d'un centre de rotation donné, ou le centre de rotation d'un axe permanent connu, ainsi que la condition nécessaire pour qu'une droite soit un axe permanent, etc.

3. Soit Oz un axe permanent relatif au point O; représentons par z la distance du lieu d'un élément dm de la masse du corps au plan perpendiculaire à Oz mené par le point O. Par la droite Oz je mène deux plans à volonté; soient h et h' les distances de l'élément dm à ces deux plans.

Si l'on a les deux conditions

$$(1) \qquad \int hz\,dm = 0, \quad \int h'z\,dm = 0,$$

ces intégrales définies étant étendues à toute la masse du corps, *la droite* Oz *sera un axe permanent relatif au point* O.

4. La propriété citée n° **2** consiste en ce que, les deux équations (1) étant satisfaites, *si l'on mène un troisième plan quelconque par* Oz, que l'on prenne comme ci-dessus la distance de l'élément dm à ce plan, et que l'on multiplie aussi cette distance par $z\,dm$ pour former un élément différentiel analogue à $hz\,dm$, *la nouvelle intégrale, que l'on obtiendra comme les précédentes* (1), *sera également nulle.*

En effet, soient Ox l'intersection de ce plan avec le plan perpendiculaire à Oz; Oy la perpendiculaire au plan zOx menée par le point O; ω et ω' les angles des deux premiers plans, conduits suivant Oz (n° **2**) avec le plan zOx; et enfin x, y, z les coordonnées de l'élément dm par rapport aux trois droites rectangulaires Ox, Oy, Oz. On aura

$$h = y\cos\omega - x\sin\omega, \qquad h' = y\cos\omega' - x\sin\omega';$$

d'où

$$y = \frac{h\sin\omega' - h'\sin\omega}{\sin(\omega' - \omega)};$$

et par suite

$$\int yzdm = \frac{\sin\omega' \int hzdm - \sin\omega \int h'zdm}{\sin(\omega' - \omega)}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction est nul en vertu des relations (1); son dénominateur est différent de zéro; donc on a

$$\int yzdm = 0. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

5. Les problèmes énoncés n° **2** ont leurs solutions renfermées dans les équations de la question suivante :

Un corps étant rapporté à trois axes rectangulaires quelconques Gx, Gy, Gz, *trouver la direction d'un axe permanent de ce corps relatif à un point* O *dont les coordonnées sont* a, b, c.

Soient α, β, γ les angles de la droite cherchée avec les axes Gx, Gy, Gz. Conformément à la définition du n° **3**, il faut d'abord évaluer la distance de l'élément dm au plan conduit par le point O perpendiculairement à la ligne cherchée; cette distance sera

$$(2) \qquad R = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma.$$

On aura ensuite à déterminer les distances du même élément à deux plans conduits à volonté par cette droite : je prendrai les deux plans qui la projettent sur les plans coordonnés xGz et yGz; alors les distances en question seront exprimées par

$$\frac{(x - a)\cos\gamma - (z - c)\cos\alpha}{\sin\beta} \quad \text{et} \quad \frac{(y - b)\cos\gamma - (z - c)\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Remplaçant, dans les équations (1), h et h' par ces valeurs, et z par R, on trouvera les formules

$$(3) \qquad \frac{\int R(x - a)dm}{\cos\alpha} = \frac{\int R(y - b)dm}{\cos\beta} = \frac{\int R(z - c)dm}{\cos\gamma}.$$

Si l'on y réunit la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{4}$$

on aura la solution complète du problème.

6. Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la droite, de sorte qu'on ait

$$\frac{X-a}{\cos\alpha} = \frac{Y-b}{\cos\beta} = \frac{Z-c}{\cos\gamma}; \tag{5}$$

la ligne étant ainsi déterminée par l'un de ses points et par sa direction, si l'on élimine a, b, c, entre les équations (3) et (5), l'équation finale exprimera la condition nécessaire pour qu'une droite donnée soit un axe permanent.

7. Cette condition étant satisfaite, les équations (3) et (5) s'accorderont pour donner les trois coordonnées a, b, c du centre de rotation de la ligne dont il s'agit.

8. L'équation de condition indiquée n° **6** et les équations (5) étant homogènes par rapport aux cosinus, suffisent pour donner la relation indépendante de ces lignes trigonométriques, qui démontre ce théorème connu, que *tous les axes permanents passant par un point donné appartiennent à un cône du second degré*, etc.

9. On pourrait déduire des équations (3), (4) et (5) toutes les propositions du Mémoire de M. Ampère. Je m'arrêterai à celle du chapitre III; parce que l'on y considère une surface du troisième degré appartenant à une famille dont la génération et l'équation aux différentielles partielles se rapprochent, par leur simplicité, de celles que l'on présente dans le Cours d'Analyse de l'École Polytechnique et qui se rapportent aux cylindres, aux cônes, aux conoïdes et aux surfaces de révolution.

10. *Déterminer la courbe contenant tous les centres de rotation des axes permanents passant par un point donné.*

Les équations (3) et (5) étant homogènes par rapport aux cosinus, l'élimination des trois quantités α, β, γ entre ces quatre équations donnera deux équations finales qui appartiendront aux coordonnées

a, b, c d'un point quelconque de la courbe cherchée. Pour simplifier les calculs, je rapporte le corps au point donné et aux axes permanents qui s'y croisent. Soient, dans cette hypothèse,

$$A_1 = \int (y^2 + z^2)\,dm, \quad B_1 = \int (x^2 + z^2)\,dm, \quad C_1 = \int (x^2 + y^2)\,dm,$$

les moments d'inertie relatifs aux axes coordonnés, M la masse du corps, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité: introduisant ces valeurs dans les équations (3) et (5), où l'on devra faire

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

l'élimination indiquée donnera les trois équations

$$(6) \quad \begin{cases} (A_1 - B_1)\,ab = M(a^2 + b^2 + c^2)(y_1 a - x_1 b), \\ (C_1 - A_1)\,ac = M(a^2 + b^2 + c^2)(x_1 c - z_1 a), \\ (B_1 - C_1)\,bc = M(a^2 + b^2 + c^2)(z_1 b - y_1 c), \end{cases}$$

dont l'une est la conséquence des deux autres.

L'élimination de M entre deux de ces équations donne la suivante

$$(7) \quad (A_1 - B_1)\,z_1 ab + (C_1 - A_1)\,y_1 ac + (B_1 - C_1)\,x_1 bc = 0,$$

qui appartient au cône cité n° **8**.

La courbe demandée appartient donc aux quatre surfaces déterminées par les équations (6) et (7), dans lesquelles a, b, c représentent les coordonnées des points de ces surfaces.

11. J'examinerai le lieu géométrique de l'une des équations (6). Supposons que l'on ait

$$A_1 > B_1 > C_1,$$

et posons

$$\frac{A_1 - B_1}{M} = l^2;$$

la première équation (6) pourra se mettre sous la forme

$$8 \qquad \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{abl^2}{(y_1 a - x_1 b)\sqrt{a^2 + b^2}};$$

si l'on fait, dans celle-ci, $b = a \operatorname{tang} \omega$, afin d'avoir l'intersection de la surface avec un plan conduit suivant l'axe des z, on trouvera

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{l^2 \sin \omega \cos \omega}{y_1 \cos \omega - x_1 \sin \omega} = \text{constante}.$$

Le premier membre est le quotient du carré du rayon vecteur d'un point de l'intersection divisé par la projection de ce rayon vecteur sur la trace du plan de cette ligne; et puisque le second membre est constant, il s'ensuit que la courbe est un cercle touchant l'axe des z à l'origine, et dont le diamètre a pour valeur

$$\frac{l^2 \sin \omega \cos \omega}{y_1 \cos \omega - x_1 \sin \omega}.$$

En faisant varier l'angle ω qui fixe la direction du plan coupant, on obtiendra différents cercles dont les centres parcourront une courbe située dans le plan des xy : le rayon vecteur du centre du cercle correspondant à l'angle ω étant égal à la moitié de l'expression précédente, on obtiendra facilement l'équation suivante pour représenter la courbe des centres

$$9 \qquad l^2 ab = 2(a^2 + b^2)(y_1 a - x_1 b)$$

Cette ligne est semblable à l'intersection de la surface (8) avec le plan xy; le centre de similitude est à l'origine, et le rapport de similitude est 2. Tous ces résultats sont faciles à interpréter.

Je conclus de ce qui précède que *la surface de l'équation* (8) *peut être engendrée par un cercle variable touchant constamment l'axe des z à l'origine, et dont le plan tourne autour de cet axe, tandis que son centre parcourt la courbe* (9) *tracée dans le plan xy.*

Lorsque le plan mobile atteint le centre de gravité, le rayon du

cercle générateur devient infini, et ce cercle dégénère en une droite qui n'est autre que l'axe des z. Le cercle variable se réduit à un point qui n'est autre que l'origine quand son plan coïncide avec l'un des plans coordonnés.

La courbe demandée (n° **10**) étant l'intersection du cône (7) avec la surface (8), dont les sections circulaires passent par le sommet du cône, il s'ensuit que cette courbe pourra être tracée facilement par les procédés de la géométrie descriptive.

12. Deux cercles quelconques de la surface représentée par l'équation (8), ayant une tangente commune, appartiennent à une même sphère : donc *la surface dont il s'agit est l'enveloppe d'une sphère variable passant constamment par l'origine et dont le centre parcourt la courbe du plan xy représentée par l'équation* (9).

La *caractéristique* de cette enveloppe est le cercle variable dont le plan tourne autour de l'axe des z (n° **11**).

13. Je me propose d'*obtenir l'équation générale des surfaces définies* n^{os} **11** et **12**, *quelle que soit la courbe tracée dans le plan xy qui dirige le centre du cercle ou de la sphère variable.*

Les conditions de ce énoncé exigent que la fraction

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

conserve une valeur constante quand le rapport $\frac{b}{a}$ reste invariable. Donc il faut que $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ soit une fonction de $\frac{b}{a}$; et comme on peut mettre cette expression sous la forme

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}},$$

l'équation demandée sera

$$(10) \quad a^2+b^2+c^2 = a\varphi\left(\frac{b}{a}\right), \quad \text{ou} \quad a^2+b^2+c^2 = b\varphi\left(\frac{a}{b}\right).$$

φ étant l'indice d'une fonction arbitraire.

L'équation (8), étant mise sous la forme

$$a^2 + b^2 + c^2 = a - \frac{l^2 \frac{b}{a}}{y_1 - \frac{b}{a} x_1},$$

appartient évidemment à la famille comprise dans l'équation (10).

14. *Trouver l'équation aux différentielles partielles de la même classe des surfaces.*

Soient a_1 et b_1 les coordonnées du centre d'une sphère enveloppée (n° **12**); l'équation de cette sphère sera

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a_1 a + 2b_1 b.$$

Soient p et q les coefficients différentiels de l'ordonnée c, pris en regardant séparément les abscisses a et b comme variables, de sorte que l'on ait

$$p = \frac{dc}{da}, \quad q = \frac{dc}{db}.$$

L'équation de la sphère enveloppée, étant différenciée successivement par rapport aux deux variables indépendantes, donne

$$a + cp = a_1, \quad b + cq = b_1;$$

et si l'on porte ces valeurs de a_1 et de b_1 dans l'équation précédente, on aura l'équation aux différentielles partielles demandée

$$(11) \qquad ap + bq = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2c},$$

qui appartient aux sphères enveloppées et à leur enveloppe, indépendamment de toute condition à laquelle on pourrait assujétir le centre de l'enveloppée.

15. Si l'on différentie successivement, par rapport à chaque variable indépendante, l'équation (10), et que l'on élimine la fonction arbitraire et sa dérivée, on trouvera l'équation différentielle (11).

Réciproquement si l'on cherche, par la méthode connue, l'intégrale de cette équation aux différentielles partielles, on obtiendra l'équation finie (10).

16. M. Binet, dans le XVIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et M. Guibert, dans le XXVe, ont déterminé le centre de rotation dont les axes permanents sont parallèles à ceux d'une origine connue. On peut donner plus de généralité à cette question en se proposant de *trouver le point de l'espace où les axes permanents sont parallèles à trois droites rectangulaires prises arbitrairement*. Alors le problème n'est pas toujours possible; et il est intéressant de chercher les limites qui renferment les directions que doivent avoir les droites données pour que la solution soit réelle. En nous occupant de cette recherche nous serons conduits à des propositions qui ne sont pas énoncées dans les Mémoires cités.

Pour traiter la question actuelle, il est nécessaire de rappeler les propriétés de la courbe qui contient tous les centres de rotation dont deux des axes permanents correspondent à des moments d'inertie égaux; de sorte que, en chacun de ces points, il y a une infinité d'axes permanents situés dans un même plan. La courbe dont il s'agit est composée d'une ellipse et d'une hyperbole, appelées par M. Chasles (*Aperçu historique*, note 31) *coniques focales* ou *excentriques* d'un système de surfaces du second degré. Ce système est ici celui des trois espèces de surfaces à centre qui ont leurs axes principaux dirigés sur les axes principaux du corps (n° **1**). On sait qu'en un point commun à trois de ces surfaces d'espèces différentes, les normales sont dirigées suivant les trois axes permanents relatifs à ce point, etc. J'emploierai, pour déterminer les coniques focales de ce système, une méthode qui diffère peu de celle de M. Binet, mais qui conduira à une propriété de l'ellipsoïde dont les carrés des demi-axes sont respectivement égaux aux moments d'inertie principaux divisés par la masse.

17. Je me propose d'abord de *former l'équation du troisième degré dont l'inconnue est le moment d'inertie du corps par rapport à l'un des axes permanents qui se croisent en un point donné*, en supposant connus les axes et les moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité.

Le corps étant rapporté à ces axes, soient

$$A = \int (y^2 + z^2)\,dm, \quad B = \int (x^2 + z^2)\,dm, \quad C = \int (x^2 + y^2)\,dm.$$

les moments d'inertie principaux, a, b, c les coordonnées du point donné, α, β, γ les inclinaisons, sur les axes coordonnés, d'un axe permanent relatif à ce point, et I le moment d'inertie inconnu. Je pose, pour abréger,

$$I' = I - M(a^2 + b^2 + c^2),$$

et

$$R' = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma.$$

En introduisant ces expressions dans les équations (3), et en ayant égard au choix des axes coordonnés, on obtiendra les relations

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} a\cos\beta - b\cos\alpha &= \frac{(A-B)\cos\alpha\cos\beta}{MR'},\\ c\cos\alpha - a\cos\gamma &= \frac{(C-A)\cos\alpha\cos\gamma}{MR'},\\ b\cos\gamma - c\cos\beta &= \frac{(B-C)\cos\beta\cos\gamma}{MR'},\end{aligned}\right.$$

qui se réduisent à deux équations distinctes.

On a d'ailleurs, par un principe connu,

$$(13)\qquad I' = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - MR'^2.$$

Cette équation, combinée avec les précédentes, donne

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} (I' - A)\cos\alpha + MR'a &= 0,\\ (I' - B)\cos\beta + MR'b &= 0,\\ (I' - C)\cos\gamma + MR'c &= 0.\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations, étant homogènes et linéaires par rapport aux cosi-

nus, se prêtent à l'élimination des lignes trigonométriques, et elles conduisent à l'équation du troisième degré demandée

$$(15)\qquad \frac{a^2}{I'-A} + \frac{b^2}{I'-B} + \frac{c^2}{I'-C} + \frac{1}{M} = 0.$$

18. Si l'on fait $I' = 0$ dans l'équation précédente, elle devient

$$\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} = \frac{1}{M};$$

donc, *en tout point de l'ellipsoïde dont les demi-axes sont, en grandeur et en direction, les racines des moments d'inertie principaux divisés par la masse, le moment d'inertie relatif à l'un des axes permanents est égal au produit de la masse par le carré de la distance de ce point au centre de gravité.*

Les deux autres moments d'inertie seront donc déterminés par une équation du second degré.

19. Supposons que l'on ait $A > B > C$; on reconnaîtra facilement, par un principe de la résolution des équations numériques, que C est compris entre la plus petite et la moyenne racine de l'équation (15), et que B est compris entre la moyenne et la plus grande. Par conséquent, dans l'hypothèse admise, cette équation ne saurait avoir ses trois racines égales; mais elle peut avoir deux racines égales à C ou deux racines égales à B. Dans le premier cas, il faudra que l'on ait les deux équations

$$(16)\qquad c = 0,\quad \frac{a^2}{A-C} + \frac{b^2}{B-C} = \frac{1}{M};$$

et le second exige les deux relations

$$(17)\qquad b = 0,\quad \frac{a^2}{A-B} - \frac{c^2}{B-C} = \frac{1}{M}.$$

Donc *le lieu des points de l'espace où deux axes permanents correspondent à des moments d'inertie égaux, et où, par conséquent, le corps admet une infinité d'axes permanents, est le système des deux coniques*

représentées par les deux équations précédentes : une ellipse située dans le plan du plus grand et du moyen moment principal, et une hyperbole tracée dans le plan des deux moments extrêmes, ces deux courbes ayant leurs axes principaux dans la même direction, et chacune d'elles ayant ses sommets aux foyers de l'autre.

20. Quand on prendra un centre de rotation appartenant à l'une de ces courbes, l'équation (15) réduite au premier degré fera connaître le moment d'inertie relatif au troisième axe permanent. Les équations (4) et (14), dans lesquelles on introduira soit l'hypothèse $c = 0$ et $I' = C$, soit $b = 0$ et $I' = B$, laisseront l'un des angles entièrement indéterminé (ce sera γ dans le premier cas et β dans le second); mais elles détermineront le rapport des cosinus des deux autres; et, si l'on compare la valeur de ce rapport à l'équation de la courbe correspondante, (**16**) ou (**17**), on reconnaîtra que *tous les axes permanents, relatifs à un centre de rotation pris sur l'une de ces courbes et qui correspondent à des moments égaux, appartiennent à un même plan normal à la conique, et que par conséquent le troisième axe permanent est dirigé suivant la tangente à cette courbe.*

21. Les équations (12) exprimant que la droite, inclinée sur les axes coordonnés des quantités angulaires α, β, γ, est un axe permanent relatif au point (a, b, c), il s'ensuit que si l'on y regarde α, β, γ comme constantes, ces équations appartiendront au lieu géométrique de tous les centres de rotation pour lesquels l'un des axes permanents est parallèle à la droite représentée par l'équation

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma}. \tag{18}$$

Or les formules (12) donnent la suivante

$$\frac{B-C}{\cos\alpha}\,a + \frac{C-A}{\cos\beta}\,b + \frac{A-B}{\cos\gamma}\,c = 0. \tag{19}$$

qui représente un plan passant par la droite (18). Donc *tous les axes permanents parallèles à une direction donnée sont dans un même plan passant par le centre de gravité.*

22. La direction de la trace du plan (19) et celle de la projection de

la droite (18) sur un même plan principal sont liées par une relation très-simple. Soient, par exemple, Δ et ϑ les tangentes trigonométriques des angles que font, avec l'axe des x ou des a, celles de ces lignes qui sont dans le plan des a, b, de sorte que l'on ait

$$\Delta = -\frac{B-C}{C-A}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) \qquad \text{et} \qquad \vartheta = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma};$$

on déduit de là

$$\frac{\Delta}{\vartheta} = \frac{B-C}{A-C}. \tag{20}$$

Comme cette relation ne renferme que le rapport $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, il s'ensuit que *si, dans un plan perpendiculaire à l'un des plans principaux, on mène tant de droites que l'on voudra, et que l'on détermine le plan qui contient tous les axes permanents parallèles à l'une de ces droites, tous les plans ainsi obtenus auront la même trace sur le plan principal en question.*

23. La relation (20) lie aussi la direction d'un diamètre de l'ellipse représentée par les équations (16) avec celle de la normale à l'extrémité de ce diamètre. On conclut de là cette construction : *Menez à l'ellipse focale (16) une normale parallèle à la projection de la droite donnée; joignez le centre de gravité au point où cette normale rencontre la courbe, et vous aurez la trace du plan qui contient tous les axes permanents parallèles à la droite donnée.*

La considération de l'hyperbole focale déterminée par l'équation (17) fournirait des conséquences analogues; mais le moyen de construction que l'on en déduirait deviendrait illusoire si la trace du plan cherché ne devait pas rencontrer cette courbe.

24. Pour connaître la nature de la courbe représentée par les équations (12), dans lesquelles α, β, γ sont constants (n° **21**), j'ajoute ces équations élevées au carré; apres des réductions et des transformations faciles à saisir, on trouve

$$R'\sqrt{a^2+b^2+c^2} - R'^2 = z. \tag{21}$$

On a fait ici, pour abréger,

$$\tau = \frac{\sqrt{(A-B)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + (C-A)^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma + (B-C)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma}}{M}.$$

Le radical $\sqrt{a^2+b^2+c^2-R'^2}$ exprime la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point de la courbe sur la droite de l'équation (18); R' (n° **17**) représente la distance de l'origine au pied de cette perpendiculaire; ces deux quantités sont donc les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe dans son plan; et, puisque leur produit est constant, il s'ensuit que *le lieu géométrique des centres de rotation des axes permanents parallèles à une droite donnée est une hyperbole équilatère située dans le plan déterminé* n° **22**, *ayant son centre au centre de gravité du corps, et pour âsymptote une parallèle à la droite donnée.*

Pour abréger, on peut appeler cette courbe *l'hyperbole équilatère correspondante à la droite donnée.*

Puisque la parallèle à la droite donnée qui passe par le centre de gravité est l'asymptote de l'hyperbole correspondante, on voit que *le centre de rotation d'une droite menée par le centre de gravité est à l'infini.*

25. Si la droite donnée était parallèle à l'un des axes principaux, les deux équations de l'hyperbole équilatère se réduiraient à celle du plan perpendiculaire à cet axe. Donc, *à tout point d'un plan principal, il correspond un axe permanent perpendiculaire à ce plan.* Cette proposition et ses conséquences sont développées dans la Note de M. Guibert.

26. Supposons connu le point où une hyperbole équilatère déterminée par les équations (19) et (21) rencontre le plan des a, b; comme, au même point, il y a un axe permanent perpendiculaire à ce plan principal n° **25**, et que la droite donnée est en général oblique à ce plan, il faut que le point en question soit un des centres de rotation auxquels correspondent (n° **19**) une infinité d'axes permanents; donc ce point doit être sur l'ellipse focale des équations (16). De là résulte la conséquence suivante qui, réunie à la construction donnée n° **23**, sert à déterminer complétement, par la règle et le compas, l'hyperbole équilatère dont

il s'agit : *Une hyperbole représentée par les équations* (19) *et* (21) *perce le plan des a, b aux points où la trace de son plan rencontre l'ellipse focale de l'équation* (16).

Ainsi l'on connaît les asymptotes et un point de cette courbe, la quantité τ (n° **24**) peut donc être obtenue par des opérations graphiques.

On conclut encore de ce qui précède que *toutes ces hyperboles équilatères rencontrent le plan des a, b; aucune d'elles n'atteint le plan des b, c; celles qui sont situées dans les plans passant par les diamètres transverses de l'hyperbole focale* (17) *coupent seules le plan des a, c.* Enfin *les hyperboles équilatères, situées dans différents plans qui ont une trace commune* (n° **22**), *rencontrent toutes aux mêmes points le plan principal qui contient cette trace.*

Ces propositions peuvent être prouvées analytiquement au moyen des équations (12). Ainsi, par exemple, si l'on cherche le lieu des points de rencontre de toutes les hyperboles équilatères qu'elles représentent avec le plan des a, b, on trouve une équation indépendante des angles α, β, γ qui n'est autre que celle de l'ellipse focale (16), etc.

27. Puisque la direction de l'un des axes permanents est connue quand le centre de rotation est pris sur l'une des hyperboles équilatères que nous considérons, il s'ensuit que la détermination des deux autres axes permanents ne doit dépendre que de constructions exécutables avec la règle et le compas. En effet, soient p et q les coordonnées, parallèles aux axes des a et des b, du point où l'un des axes permanents cherchés rencontre le plan des ab; P et Q les coordonnées du point analogue de l'axe permanent connu. On introduira ces expressions dans les équations (12) au moyen des formules

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{a-p}{c}, \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{b-q}{c}.$$

On obtiendra ainsi deux équations qui devront être satisfaites par $p = \mathrm{P}$ et $q = \mathrm{Q}$. En ayant égard à cette condition, on trouvera, pour déterminer les inconnues, les deux relations

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})pq + (\mathrm{B}-\mathrm{C})bp - (\mathrm{A}-\mathrm{C})aq = 0,$$

$$\frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{A}-\mathrm{C}} + \frac{\mathrm{Q}q}{\mathrm{B}-\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

La seconde, qui est linéaire, étant comparée à l'équation (16), conduit à ce théorème : *Les points où les trois axes permanents relatifs à un même centre de rotation rencontrent l'un des plans principaux, forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé par rapport à la conique focale située dans ce plan principal.*

Ainsi, en construisant la polaire du point où l'axe permanent connu rencontre le plan des ab, on aura une première ligne contenant les deux points cherchés. Ces deux points appartiennent aussi à l'hyperbole représentée par la première des équations ci-dessus. La solution demandée n'a donc plus de difficulté.

28. Par le centre de l'hyperbole équilatère correspondante à la droite de l'équation (18), menons une perpendiculaire à son plan (19) : la projection de cette droite sur le plan des ab fera avec l'axe des a un angle ayant pour tangente trigonométrique

$$\delta' = \frac{C - A}{B - C} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

La relation (20) donnera l'inclinaison Δ' de la trace du plan de l'hyperbole équilatère correspondante à cette nouvelle droite, savoir

$$\Delta' = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Comparant cette valeur à celle de δ (n° **22**), on voit que la première droite donnée est perpendiculaire au plan de la seconde hyperbole : d'où l'on conclut que *si l'on mène une perpendiculaire au plan de l'hyperbole correspondante à une droite donnée, cette perpendiculaire et la droite donnée seront réciproquement telles que chacune d'elles sera perpendiculaire au plan de l'hyperbole qui correspond à l'autre;* et que par conséquent *ces deux hyperboles équilatères auront une asymptote commune dirigée suivant l'intersection de leurs plans.*

29. Au point commun de ces deux hyperboles, point qui est à l'infini sur leur asymptote commune, deux des axes permanents sont parallèles aux deux autres asymptotes de ces courbes; donc le troisième est dirigé suivant l'asymptote commune. On conclut de là que, si l'on a la direction de l'une des droites données dont il est question dans le

probleme énoncé au n° **16**, *ce problème sera impossible dans les deux cas suivants :*

1°. *Si les deux autres directions données sont les deux autres asymptotes des deux hyperboles équilatères dont la droite donnée est l'asymptote commune : alors le point demandé est à l'infini sur la droite donnée ;*

2°. *Si l'une des deux autres directions données est la seconde asymptote de l'hyperbole équilatère correspondante à la droite donnée. Alors le point cherché est à l'infini de cette seconde asymptote.*

On verra (n° **35**) que ces directions, auxquelles répondent des valeurs infinies, sont les limites des solutions réelles et des résultats imaginaires.

30. En comparant les formules du n° **28** avec celles du n° **22**, on trouve

$$\Delta\Delta' = -\frac{B-C}{A-C},$$

relation qui convient aux directions de deux diamètres conjugués de l'ellipse représentée par les équations (16). Donc *les traces des plans de deux hyperboles équilatères ayant une asymptote commune forment un système de diamètres conjugués de la conique focale située dans le plan de ces traces.*

31. La relation précédente et celles que l'on trouverait de la même manière, en considérant les projections faites dans le plan des a, c, suffisent pour déterminer tous les éléments de la seconde hyperbole située dans un plan perpendiculaire à celui de la première et ayant une asymptote commune avec celle-ci. Si l'on désigne par τ' la puissance de cette seconde hyperbole analogue à la quantité τ (n° **24**), par α', β', γ' les inclinaisons sur les axes coordonnés de la droite à laquelle elle correspond. Les conditions du n° **28** donneront

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{B-C} = \frac{\cos\beta\cos\beta'}{C-A} = \frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{A-B};$$

d'où l'on conclura

$$M\tau\cos\alpha' = (A-C)\cos\beta\cos\gamma, \quad M\tau\cos\beta' = (C-A)\cos\alpha\cos\gamma,$$
$$M\tau'\cos\gamma' = (A-B)\cos\alpha\cos\beta, \quad M\tau'\cos\alpha = (B-C)\cos\beta'\cos\gamma',$$
$$M\tau'\cos\beta = (C-A)\cos\alpha'\cos\gamma', \quad M\tau'\cos\gamma = (A-B)\cos\alpha'\cos\beta'.$$

D'après ces relations on obtiendra τ' de cette manière : *Portez sur chacun des trois axes principaux une longueur qui représente le quotient de la différence des moments d'inertie relatifs aux deux autres, divisée par la masse; projetez chacune de ces longueurs sur la droite donnée* (18); *faites le produit de ces trois projections que vous diviserez par* τ^2, *et le résultat sera la valeur de* τ'.

32. La direction de l'asymptote commune aux deux hyperboles équilatères considérées (n° **28**) est entièrement déterminée; on pourra donc obtenir, en fonction des angles α, β, γ, la puissance τ'' de l'hyperbole correspondante à cette droite : en comparant la valeur trouvée aux expressions de τ et de τ', on aura la relation

$$\tau''^2 = \tau^2 + \tau'^2.$$

33. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque rapporté aux axes principaux, les équations des plans de deux hyperboles équilatères ayant une asymptote commune seront

$$\frac{B-C}{\cos\alpha}x + \frac{C-A}{\cos\beta}y + \frac{A-B}{\cos\gamma}z = 0 \quad \text{n° } \mathbf{21},$$

et

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \quad \text{n° } \mathbf{28}).$$

Soient h et h' la distance du lieu de l'élément dm à chacun de ces plans; on formerait facilement les valeurs de ces quantités; et si l'on multipliait leur produit par dm, on trouverait, en ayant égard à la position des axes coordonnés, que *l'intégrale* $\int hh'dm$, *étendue à toute la masse du corps, est égale à zéro.*

34. Nous pouvons maintenant résoudre la question énoncée n° **16** : *Déterminer le point de l'espace où les trois axes permanents ont des directions connues.*

Une seule de ces directions est entièrement arbitraire, et la question revient à chercher un centre de rotation qui ait deux axes permanents parallèles à deux droites données perpendiculaires entre elles.

Je place l'origine au centre de gravité G, et je prends les axes coordonnés

Gz dirigé suivant l'une des deux droites données;

Gx suivant la seconde asymptote de l'hyperbole équilatere correspondante à cette première droite donnée. Le plan des xz sera donc le plan de cette hyperbole dont la puissance sera représentée par τ, comme au n° **24**;

Gy, le troisième axe coordonné, sera dirigé suivant la perpendiculaire au plan de cette hyperbole; et par conséquent le plan des xy contiendra l'hyperbole équilatère correspondante à la droite Gy. La puissance de cette seconde hyperbole sera représentée par Υ', comme au n° **31**.

Les positions des deux hyperboles dont il s'agit étant entièrement déterminées (n^{os} **26** et **28**), on pourra fixer le sens des nouvelles coordonnées de manière que T et T′ soient positifs.

Pour former l'équation de l'hyperbole correspondante à Gz, je cherche les coordonnées a, b, c d'un point où l'un des axes permanents soit parallèle à cette droite Gz. La définition du n° **3** donne les deux équations

$$\int (z - c)(x - a)\,dm = 0$$

et

$$\int (z - c)(y - b)\,dm = 0.$$

Mais le théorème du n° **33** donne $\int yz\,dm = 0$; ces deux équations se réduisent donc à

$$(22) \qquad b = 0, \quad ac = -\frac{\int xz\,dm}{M} = \Upsilon.$$

On trouvera de même les équations suivantes pour l'hyperbole équilatère correspondante à la droite Gy,

$$(23) \qquad c = 0, \quad ab = -\frac{\int xy\,dm}{M} = \Upsilon.$$

La seconde droite donnée devant être perpendiculaire à la première

Gz, ses équations seront

$$z = 0, \quad y = \delta x. \tag{24}$$

Je cherche l'hyperbole correspondante à cette droite. Soient a, b, c les coordonnées d'un centre de rotation O où l'un des axes permanents est parallèle à cette ligne: la distance de l'élément dm au plan mené par le point O, perpendiculairement à la droite des équations (24), sera

$$\frac{\delta y + x - (\delta b + a)}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Conformément à la définition du n° **3**, je mène par le point O un plan parallèle au plan xy et un autre parallèle à celui qui projette la droite des équations (24); j'aurai ainsi deux plans passant par la parallèle à cette droite menée du point O. Les distances de l'élément dm à chacun de ces plans seront

$$z - c,$$

et

$$\frac{y - \delta x - (b - \delta a)}{\sqrt{1+\delta^2}};$$

les conditions du n° **3** donneront donc ici

$$\int [\delta y + x - (\delta b + a)](z - c)\, dm = 0,$$
$$\int [\delta y + x - (\delta b + a)]\,[y - \delta x - (b - \delta a)]\, dm = 0.$$

Soient A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie par rapport aux axes Gx, Gy, Gz. En introduisant ces valeurs dans les deux équations précédentes, elles deviendront, réduction faite,

$$\left\{\begin{array}{l} (\delta b + a)\, c = \tau, \\ M(\delta b + a)(b - \delta a) = (1 - \delta^2)\, M\tau' + \delta\,(B_1 - A_1). \end{array}\right. \tag{25}$$

Ces deux équations appartiennent à une hyperbole équilatère située

dans le plan représenté par l'équation

$$(26)\qquad \frac{M(b-\delta a)}{c} = \frac{(1-\delta^2)M\tau' + \delta(B_1 - A_1)}{\tau};$$

la puissance de cette hyperbole, ou le produit constant des coordonnées de l'un de ses points, par rapport à la droite de l'équation (24) et à sa perpendiculaire, est exprimée par

$$(27)\qquad \sqrt{M^2(1+\delta^2)\tau^2 + \left[\frac{(1-\delta^2)M\tau' + \delta(B_1 - A_1)}{M(1+\delta^2)}\right]^2}.$$

Maintenant le point cherché sera celui dont les coordonnées satisferont aux quatre équations (22) et (25). Or la première (25) est une conséquence des deux équations (22); donc *les hyperboles équilatères correspondantes à deux droites perpendiculaires entre elles ont un diamètre commun réel ou idéal, dirigé suivant la droite d'intersection de leurs plans*. Le point demandé, qui est sur ces deux courbes, pourra donc être construit géométriquement au moyen des principes précédents.

La question n'a pas plus de deux solutions; et quand elles sont réelles, les deux centres de rotation sont sur une droite passant au centre de gravité et coupée en deux parties égales par ce point.

35. Il résulte de la remarque du n° **29** que, pour discuter la solution précédente, il faut connaître les asymptotes des deux hyberboles équilatères dont la ligne donnée Gz serait l'asymptote commune. Or ces deux droites sont dans le plan des xy, et la ligne des équations (24) serait l'une d'elles si le plan de l'hyperbole équilatère qui lui correspond passait par la droite Gz. Mais ce plan est représenté par l'équation (26), la condition dont il s'agit donnera donc

$$(28)\qquad (1-\delta^2)M\tau' + \delta(B_1 - A_1) = 0.$$

Les deux valeurs de δ tirées de cette équation détermineront deux directions rectangulaires qui seront celles des asymptotes demandées.

Soient

δ' la racine positive de l'équation précédente ;

Gx' la droite dont la direction est déterminée par cette valeur, laquelle est par conséquent un diamètre transverse de l'hyperbole située dans le plan xy et représentée par l'équation (23);

Gy' la perpendiculaire à Gx', de sorte que Gy' ne rencontre pas la même hyperbole.

Cela posé, la solution de la question du n° **34**, qui est renfermée dans les formules (22) et (25), peut être présentée de la manière suivante :

$$b = 0,$$

$$ac = \tau,$$

$$a^2 = \frac{(A_1 - B_1)\delta + (\delta^2 - 1)M\tau'}{M\delta}.$$

Si l'on introduit, dans la valeur de a^2, celle de δ' qui satisfait à l'équation (28), on trouve

$$a^2 = \tau'\left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\delta'} + \delta\right).$$

On voit d'abord que a est infini quand on a, soit $\delta = 0$, soit $\delta = \infty$; que a est nul, et par suite c infini, quand on a, soit $\delta = \delta'$, soit $\delta = -\frac{1}{\delta'}$. Ces résultats ne sont que la reproduction des remarques du n° **29**.

Puisque, dans la formule précédente, τ' et δ' sont positifs, on voit que, *la seconde droite donnée étant*

dans l'angle xGx', la solution du problème du n° **34** *est imaginaire,*
dans l'angle $x'Gy$, la solution est réelle,
dans l'angle yGy', la solution est imaginaire,
dans le supplément de l'angle $y'Gx$, la solution est réelle.

36. Soit T la puissance de l'une des hyperboles équilatères correspondantes aux droites Gx' et Gy'. Cette valeur sera donnée par la for-

mule (27), dans laquelle on introduira la relation (28); et l'on aura

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \delta^2}}.$$

Si donc on représente par ω l'angle xGx', on aura, pour T, deux valeurs exprimées par

$$\tau \cos \omega \quad \text{et} \quad \tau \sin \omega.$$

Donc *si l'on a deux hyperboles équilatères dont les plans se coupent suivant leur asymptote commune* (n° **28**), *et que l'on fasse passer par cette droite le plan de l'hyperbole qui lui correspond* (n° **24**); *si, dans ce plan, on construit une surface égale à la puissance de l'hyperbole qu'il contient, les puissances des deux premières seront respectivement égales aux projections faites dans leurs plans de la puissance de la troisième.*

La relation trouvée n° **32** est une conséquence de ce théorème.

37. Les questions résolues n^os^ **21**, **23**, **24** et **26** donnent immédiatement la solution de ce problème : *Déterminer le centre de rotation d'un plan donné.*

En effet, le point cherché est à la rencontre du plan donné avec l'hyperbole équilatère correspondante à une droite perpendiculaire à ce plan.

Ce problème n'aura généralement qu'une solution, parce que le plan donné est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole. Le point demandé serait à l'infini si le plan donné passait par le centre de gravité. La question serait indéterminée si ce plan coïncidait avec l'un des plans principaux.

38. En traitant par l'analyse la question précédente, on est conduit à considérer une surface du cinquième degré qui peut être engendrée d'une manière assez simple par le mouvement d'une section conique.

Je place l'origine en un point du plan donné, et je dirige les axes coordonnés suivant les axes permanents relatifs à cette origine. Le

plan donné sera représenté par l'équation

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

dans laquelle α, β, γ sont les inclinaisons de la perpendiculaire à ce plan sur les axes coordonnés. Je reprends les notations du n° **10**, et je pose, en outre,

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = R_1,$$

de sorte que R_1 représentera la distance du centre de gravité au plan donné. Si l'on appelle a, b, c les coordonnées de son centre de rotation, on aura d'abord

$$(29) \qquad a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0;$$

ensuite les coordonnées a, b, c doivent satisfaire aux équations (3), puisque l'un des axes permanents relatifs à ce point fait, avec les axes coordonnés, les angles α, β, γ; écrivant donc cette condition, on trouve, réduction faite,

$$\begin{aligned}
(A_1 - B_1) \cos \alpha \cos \beta &= MR_1 (b \cos \alpha - a \cos \beta), \\
(C_1 - A_1) \cos \alpha \cos \gamma &= MR_1 (a \cos \gamma - c \cos \alpha), \\
(B_1 - C_1) \cos \beta \cos \gamma &= MR_1 (c \cos \beta - b \cos \gamma).
\end{aligned}$$

Ces équations, qui se réduisent à deux, étant réunies à l'équation (29), composent un système du premier degré qui résout la question.

En introduisant la quantité auxiliaire

$$I = A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \cos^2 \beta + C_1 \cos^2 \gamma,$$

les valeurs des coordonnées deviennent

$$(30) \qquad a = \frac{I - A_1}{MR_1} \cos \alpha, \quad b = \frac{I - B_1}{MR_1} \cos \beta, \quad c = \frac{I - C_1}{MR_1} \cos \gamma.$$

Ces formules confirment le résultat de la discussion du n° **37**.

39. Les relations (29) et (30) étant homogènes par rapport aux cosinus, donneront deux équations finales par l'élimination de ces trois lignes trigonométriques, savoir :

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{Mx_1a}{I-A_1} + \dfrac{My_1b}{I-B_1} + \dfrac{Mz_1c}{I-C_1} = 1, \\[2ex] \dfrac{a^2}{I-A_1} + \dfrac{b^2}{I-B_1} + \dfrac{c^2}{I-C_1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine I entre ces deux dernières, *on aura l'équation de la surface qui contient les centres de rotation de tous les plans passant par un point donné.* Pour exécuter cette opération on pourra amener les équations (31) à être du premier degré en I par une transformation qui donnera

$$I - A_1 = \frac{Ma[(B_1 - C_1)x_1bc + (C_1 - A_1)y_1ac + (A_1 - B_1)z_1ab]}{(B_1 - C_1)bc - M(a^2 + b^2 + c^2)(z_1b - y_1c)},$$

$$I - B_1 = \frac{Mb[(B_1 - C_1)x_1bc + (C_1 - A_1)y_1ac + (A_1 - B_1)z_1ab]}{(C_1 - A_1)ac - M(a^2 + b^2 + c^2)(x_1c - z_1a)},$$

$$I - C_1 = \frac{Mc[(B_1 - C_1)x_1bc + (C_1 - A_1)y_1ac + (A_1 - B_1)z_1ab]}{(A_1 - B_1)ab - M(a^2 + b^2 + c^2)(y_1a - x_1b)}.$$

L'élimination de I entre ces équations, qui se réduisent à deux distinctes, conduira à une équation du cinquième degré appartenant à la surface demandée.

40. Mais, au lieu de cette équation unique, on peut employer les deux équations (31) pour représenter la surface dont il s'agit. La seconde appartient à un cône dont les axes principaux sont dirigés suivant les axes coordonnés; et si l'on a, comme au n° **11**,

$$A_1 > B_1 > C_1,$$

les deux *lignes focales* de ce cône, situées dans le plan xz, font avec

l'axe des z des angles dont les tangentes trignométriques sont

$$+\sqrt{\frac{A-B}{B-C}}, \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{A-B}{B-C}},$$

quantités indépendantes du paramètre variable I. Si, en outre, on fait attention à la forme de la première équation (31), on arrive à la conséquence suivante : *Construisez à volonté un cône dont les axes principaux soient dirigés suivant les axes permanents qui se croisent au point donné et dont les directions des lignes focales soient déterminées par les valeurs ci-dessus; construisez aussi le plan représenté par la première équation* (31) *et qui est parallèle au plan polaire du centre de gravité par rapport au cône; l'intersection du cône et du plan ainsi obtenus appartiendra à la surface demandée.*

DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE SUR UN ELLIPSOÏDE,

ET

DES DIFFÉRENTS USAGES D'UNE TRANSFORMATION ANALYTIQUE REMARQUABLE;

PAR M. JACOBI [*].

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 18 avril 1839.)

La surface de la Terre n'étant pas une surface de révolution, on a souvent essayé de rattacher un ellipsoïde osculateur à trois axes inégaux aux triangulations faites en un point de cette surface; cela rend plus intéressant le problème dont l'objet est de déterminer la ligne géodésique sur un tel ellipsoïde, problème qui semble présenter les plus grandes difficultés analytiques. En effet, l'équation différentielle du second ordre dont ce problème dépend, quand on choisit les variables dont on fait ordinairement usage, paraît d'une forme si compliquée, qu'on est facilement rebuté de le traiter. Après plusieurs tentatives inutiles, je suis cependant parvenu, en employant des artifices particuliers, à intégrer complétement cette équation, c'est-à-dire à la ramener aux quadratures, comme je l'ai annoncé à l'Académie des Sciences de Paris le 28 décembre 1838 (voir les *Comptes rendus*, tome VIII, page 284). Je vais maintenant faire connaître la forme du résultat plus explicitement. Soit l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

a étant la plus petite des trois constantes a, b, c; b la moyenne, et c la plus grande. Comme on peut exprimer les trois coordonnées d'un point

[*] Cet article est traduit de l'allemand. Voir le tome XIX (page 309) du Journal de M. Crelle.

d'une surface donnée en fonction de deux variables, je choisis ici les angles φ et ψ qui déterminent les coordonnées par les formules

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \sin\varphi \sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a},$$

$$y = \sqrt{b}\cos\varphi\sin\psi,$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \cos\psi \sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}.$$

La ligne géodésique sur l'ellipsoïde donné est alors déterminée par l'équation suivante entre les deux angles φ et ψ,

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}\,\sqrt{(b-a)\cos^2\varphi - \beta}}$$
$$- \int \frac{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi}\, d\psi}{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a}\,\sqrt{(c-b)\sin^2\psi + \beta}}$$

Cette équation est, comme on le voit, d'une forme très-simple. Une fonction de l'angle φ est égale à une fonction de l'angle ψ. Ces deux fonctions sont elles-mêmes des intégrales *abéliennes* et de la forme qui se présente immédiatement après les fonctions elliptiques. Les deux intégrales abéliennes, quoiqu'elles paraissent ici de formes trigonométriques différentes, sont cependant les mêmes au fond, de sorte qu'on peut, par de simples substitutions, les transformer en des intégrales dans lesquelles les valeurs de la variable se trouvent seulement comprises dans des intervalles différents. Les quantités α et β sont les deux constantes arbitraires que l'intégrale complète de l'équation différentielle du second ordre doit contenir. La constante α est nulle quand on fait commencer les intégrales depuis les valeurs de φ et ψ, qui répondent au point de l'ellipsoïde d'où l'on tire la ligne géodésique; l'autre constante arbitraire β n'entre que dans l'un des trois radicaux qui se trouvent comme facteurs sous le signe d'intégration : on la détermine algébriquement par la direction initiale qu'on donne à la ligne géodésique.

On obtient des résultats tout-à-fait semblables pour la rectification de la ligne géodésique. Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, une des deux intégrales abéliennes se change en un arc de cercle, l'autre en une intégrale elliptique de troisième espèce, par où l'on obtient, pour l'ellipsoïde de révolution, l'équation connue de la ligne géodésique.

Le procédé que j'ai employé, et qui consiste à exprimer les trois coordonnées d'un point de l'ellipsoïde par deux angles φ et ψ, est le même auquel on est conduit, quand on détermine le point de l'ellipsoïde par l'intersection des deux lignes de courbure sur lesquelles il se trouve, ou, ce qui revient au même, d'après la belle remarque de M. Charles Dupin, quand on considère ce point comme l'intersection de l'ellipsoïde avec les deux hyperboloïdes qui passent par le même point et dont les sections principales ont les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde. Legendre a le premier employé les formules de Monge relatives à cet objet comme instrument analytique pour ramener l'aire de la surface de l'ellipsoïde à la rectification de l'ellipse, ainsi qu'autrefois Archimède avait ramené la mesure de la surface sphérique à celle de la circonférence du cercle [*]. Euler s'était servi déjà de formules semblables, mais bornées au cas du plan, dans son travail célèbre sur le mouvement d'un point attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton; car les deux variables qu'il a choisies reviennent, d'après une remarque de Legendre, à considérer le point attiré comme l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole qui passent par ce point et qui ont pour foyers communs les deux centres d'attraction.

On peut faire une autre application remarquable du moyen indiqué plus haut, d'exprimer les coordonnées d'un point d'un ellipsoïde, au

[*] J'ai montré, dans le tome VIII du Journal de M. Crelle, qu'on peut arriver aux résultats de Legendre d'une manière très-simple et élémentaire, quand on exprime les coordonnées d'un point d'un ellipsoïde par les deux angles qui déterminent la direction de la normale en ce point. M. Dirichlet a récemment donné, dans un Mémoire lu à l'Académie, une autre méthode, aussi neuve qu'élégante et générale, qui conduit au même but.

probleme de figurer la surface de l'ellipsoïde sur une carte, de manière que les parties infiniment petites demeurent semblables.

C'est ainsi que Lambert, dans ses Mémoires, a traité le problème des cartes-projections; et Lagrange a donné, dans les Mémoires de cette Académie, la solution générale pour toutes les surfaces de révolution, solution que M. Gauss a étendue à toutes les surfaces, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague et imprimé dans le *Journal astronomique* de Schumacher.

Si l'on exprime l'élément d'une courbe tracée sur la surface par

$$\sqrt{Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2},$$

t et u etant les deux variables par lesquelles on détermine un point de la surface donnée, on a l'expression quadratique

$$Adt^2 + 2Bdt\,du + Cdu^2,$$

à décomposer en deux facteurs

$$Pdt + (Q + \sqrt{R})du,$$

et

$$Pdt + (Q - \sqrt{R})du.$$

La solution du problème dépend donc, d'après la théorie donnée par M. Gauss, de l'intégration de l'équation

$$Pdt + (Q + \sqrt{R})du = 0,$$

dans laquelle P, Q, R sont des fonctions données de t et u.

Pour les surfaces de révolution, cette équation peut toujours s'intégrer et l'on tombe sur les formules données par Lagrange. J'observe encore, ce qu'il est aisé de voir, qu'il en est de même, en général, pour les surfaces coniques et cylindriques. Quoique l'on traite ainsi facilement toutes les surfaces particulières du second ordre, le problème pour la surface générale du second ordre présente néanmoins des obs-

tacles insurmontables par le choix ordinaire des variables, à cause de la forme compliquée de l'équation différentielle à intégrer. Mais si l'on prend l'expression de l'élément d'une courbe tracée sur l'ellipsoïde, telle que je l'ai donnée dans le tome VIII du Journal de M. Crelle, les variables se séparent d'elles-mêmes dans l'équation différentielle, et le problème est ramené à de simples quadratures et même à des transcendantes abéliennes.

On peut aisément étendre les formules relatives à trois variables, dans les problèmes indiqués plus haut, à un nombre quelconque de variables, et l'on généralise ainsi d'une manière remarquables des théorèmes importants. J'ai de cette manière étendu la célèbre relation découverte par Legendre, entre les intégrales complètes de deux fonctions elliptiques du premier et du second ordre, dont les modules sont compléments l'un de l'autre, à toutes les intégrales abéliennes. Mais la même substitution m'a aussi conduit au théorème même d'Abel, par une voie et par des considérations tout-à-fait différentes de celles d'Abel, et qui tirent leur origine d'un problème de mécanique.

Les formules d'Euler, pour l'orbite d'un point attiré par deux centres fixes, contiennent des transcendantes elliptiques. Si l'une des masses ou chaque masse est nulle, l'orbite est une ellipse ou une ligne droite, et par conséquent son équation est algébrique. Mais, par l'évanouissement d'une masse ou des deux masses, les intégrales elliptiques ne cessent pas d'être des intégrales elliptiques; de sorte qu'on représente le mouvement elliptique d'une planète, ou même le mouvement rectiligne d'un point, par une équation entre des intégrales elliptiques. Cette forme n'est pas sans intérêt; car nous avons ici, pour le mouvement elliptique, des formules qui n'éprouvent qu'une légère altération quand il survient encore un second centre attirant. Il y a donc deux manières de traiter le même problème, dont l'une donne la solution sous forme transcendante, l'autre sous forme algébrique; en d'autres termes l'on a une nouvelle méthode pour trouver le théorème fondamental sur l'addition des intégrales elliptiques. Dans sa solution du problème mécanique, dans les anciens Mémoires de cette Académie, Euler n'a employé le théorème fondamental qu'il a découvert qu'à la vérification des formules trouvées pour les cas particuliers. Il m'a paru

important d'établir la liaison des deux méthodes qui donnent la forme transcendante et la forme algébrique, pour passer directement de l'une à l'autre. En opérant l'extension facile des formules employées pour deux variables à un nombre quelconque de variables, je rencontrai le théorème d'Abel, et même sous une forme nouvelle, remarquable et élégante. En même temps s'offrit à moi un moyen simple d'arriver directement, par des multiplications convenables, aux intégrales algébriques d'un système d'équations différentielles ordinaires, que j'avais précédemment posées dans le Journal de M. Crelle, concernant les transcendantes abéliennes ; ce qui m'avait paru auparavant bien désirable, mais aussi très-difficile, à cause de la grande complication du sujet.

Un des mathématiciens les plus pénétrants, M. Lamé, correspondant de cette Académie, a récemment employé les substitutions que j'ai mentionnées à la solution de problèmes de physique très-difficiles.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UN

THÉORÈME DE LEGENDRE RELATIF A LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. GAUSS [*].

On peut résoudre de petits triangles sphériques comme des triangles plans, pourvu que l'on diminue chaque angle sphérique du tiers de l'excès sphérique. Voici une démonstration tout-à-fait élémentaire de ce théorème.

Désignons l'excès sphérique par 3ω, les trois côtés du triangle par a, b, c, et les angles sphériques opposés par $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$. On a les deux formules connues

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega\sin(A-\frac{1}{2}\omega}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin(B-\frac{1}{2}\omega)\sin(C-\frac{1}{2}\omega}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)};$$

d'où résulte

$$\frac{\sin^6\frac{1}{2}a}{\cos^2\frac{1}{2}a} = \frac{\sin^3\frac{3}{2}\omega\sin^3(A-\frac{1}{2}\omega}{\sin^2(B+\omega)\sin(B-\frac{1}{2}\omega)\sin^2(C+\omega)\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}.$$

On a de même

$$\frac{\sin^6\frac{1}{2}b}{\cos^2\frac{1}{2}b} = \frac{\sin^3\frac{3}{2}\omega\sin^3(B-\frac{1}{2}\omega}{\sin^2(A+\omega)\sin(A-\frac{1}{2}\omega)\sin^2(C+\omega)\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}.$$

En divisant l'une de ces équations par l'autre, et extrayant la racine

[*] Cet article est traduit de l'allemand. *Voir* le Journal de M. Crelle, tome XXII, *l. l.*

carrée, on aura

$$\frac{\sin^3 \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} b}{\sin^3 \frac{1}{2} b} = \frac{\sin(A + \omega) \sin^2 (A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin(B + \omega) \sin^2 (B - \frac{1}{2} \omega)}.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D},$$

en représentant, pour abréger, par D la quantité

$$\frac{a^3 \cos \frac{1}{2} a}{8 \sin^3 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{8 \sin^3 \frac{1}{2} b}{b^3 \cos \frac{1}{2} b} \cdot \frac{\sin(A + \omega) \sin^2 (A - \frac{1}{2} \omega)}{\sin^3 A} \cdot \frac{\sin^3 B}{\sin(B + \omega) \sin^2 (B - \frac{1}{2} \omega)}.$$

Cette formule est rigoureuse; mais on voit aisément que si a, b, c sont très-petits du premier ordre, chacun des quatre facteurs dont D est composé ne diffère de l'unité que par des termes du quatrième ordre. Donc, etc.

Dans mes *Recherches générales sur les surfaces courbes*, j'ai étendu ce théorème aux triangles formés sur une surface courbe quelconque par les lignes les plus courtes.

NOTICE

SUR UN MANUSCRIT HÉBREU

DU

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE D'IBN-ESRA,

CONSERVÉ A LA BIBLIOTHÈQUE ROYALE

(Heb. 449, Cod. Hel. 240).

PAR M. O. TERQUEM.

Les années de la naissance et de la mort de ce célèbre rabbin ne sont pas encore exactement déterminées, mais on sait qu'il est mort à l'âge de soixante-quinze ans, de 1160 à 1170; né à Tolède, enterré probablement dans l'île de Rhodes. Au milieu d'une vie errante, remplie de tribulations diverses, il a composé sur toutes sortes de questions théologiques, cabalistiques, grammaticales et scientifiques une vingtaine d'ouvrages, dont la moitié environ est imprimée. Le Traité d'Arithmétique existe encore en manuscrit dans la bibliothèque du Vatican, de Florence, de Munich, dans la collection bodléienne, et dans celle de la Bibliothèque royale. L'extrait que nous présentons nous paraît suffisant pour donner une idée de l'état de l'Arithmétique au XIIe siècle, dans l'école arabe, dont Ibn-Esra est un des plus illustres disciples.

Le manuscrit, de format petit in-4°, contient 83 pages numérotées au recto seulement, selon l'usage oriental. On y trouve

1°. *Sepher hamispar* (1 à 29). C'est le Traité d'Arithmétique;

2°. *Tischboret* (30 à 50). Évaluation des aires polygonales et circulaires; ouvrage entièrement différent du précédent. A la page 48 on trouve une table des cordes (doubles sinus) de Abram-bar-Chaié, maître

d'Ibn-Esra. Nous en rendrons compte. C'est à tort que Rossi croit que ce sont deux titres différents d'un même ouvrage (*Dizionario storico*, vol. I, page 13);

3°. *Sepher haschem* (51 à 55). Considérations arithmético-cabalistiques sur le nom tétragrammique; édité à Munich en 1834, par Lippman (G. H.);

4°. Commentaire sur quelques théorèmes d'Euclide (55 à 58; 58 et 59 pages en blanc);

5°. *Sepher haachad* (60 à 72). Traité de l'unité divine; analogue au précédent ouvrage, mais non identique;

6°. *Biour astorlob* (73 à 76). Commentaire d'Ibn-Esra sur la construction de l'astrolabe par Emmanuel-ben-Jacob, auteur de divers écrits astronomiques;

7°. *Melechet haascheret* (78 à 83, verso). Ouvrage de mnémonique, d'après Pierre-François d'Orvieto. Fin du manuscrit.

Nous ne nous occuperons que du premier numéro. Tout est écrit en caractères rabbiniques cursifs. Plusieurs lettres se rapprochent beaucoup, pour la forme, de l'alphabet arabe, dont l'alphabet rabbinique dérive en grande partie. Je ne possède pas les connaissances paléographiques nécessaires pour juger de l'âge du manuscrit; mais un de nos plus savants orientalistes, compétent en cette matière comme sur tant d'autres, M. Munk, simple employé à la Bibliothèque royale, pourrait nous donner là-dessus d'utiles instructions [*].

Dans le texte, pour désigner les nombres, l'auteur fait constamment usage des caractères de l'alphabet hébreu; mais en marge, les exemples du texte sont écrits en chiffres tels que nous nous en servons aujourd'hui, et les opérations sont les mêmes que celles maintenant en usage. Ces notes marginales sont donc très-modernes.

On trouve, page 1re, recto, les définitions du VIIe livre d'Euclide, qui est relatif aux nombres; puis les noms des sept arts libéraux, savoir,

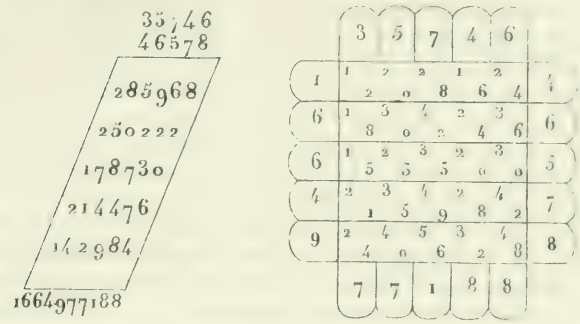
---

[*] Versé aussi dans les sciences exactes et naturelles, M. Munk est probablement le seul homme en France capable de nous renseigner sur ce que contiennent, à ce sujet, les nombreux ouvrages rabbiniques dont la Bibliothèque royale est en possession.

la grammaire, la dialectique, la rhétorique, l'arithmétique, la médecine, l'astronomie et la musique.

La page est terminée par ces deux procédés de multiplication en chiffres arabes et ainsi disposés :

Procédé péricyclique.



Nous donnons ici la traduction du début de l'auteur, parce qu'il peint l'état intellectuel de ce rabbin et même de son siècle.

Mais je remplace ici et dans la suite les lettres hébraïques du manuscrit par nos chiffres.

L'ouvrage commence ainsi au verso de la page 1re :

LIVRE D'ARITHMÉTIQUE DU SAGE RABBI ABRAHAM IBN-ESRA.

« Le Dieu suprême seul a créé neuf grands orbes, entourant la terre, qui est le monde inférieur. L'auteur du *Sepher jetzira* dit que les voies de la synthèse consistent dans le *nombre*, le *nombré* et le *nombrant* [*]. Il existe donc aussi *neuf caractères*, car *neuf* est la fin de

[*] Le *Sepher jetzira* est le plus ancien ouvrage cabalistique connu. D'après M. Zunz, l'un des plus érudits rabbinistes de l'époque, cet ouvrage n'est pas antérieur au VIIIe siècle. On voit ici l'idée ternaire qui se manifeste dans toutes les cabales.

tout calcul. On appelle ces caractères *unités*. Elles forment le premier degré, car 10 ressemble à 1, 20 à 2 [*]; 100 ressemble à 10 et à 1; 200 à 20 et à 2; de même 1,000 et 10,000. Ce sont là les chefs des *classes* qui viennent après. En voici la preuve : Fais un cercle, écris autour les neuf unités; si tu multiplies 9 par lui-même, le carré est 81, le 1 se voit à la gauche du 9 et le 8 à droite; si tu multiplies 9 par 8, tu as 72, le 2 à la gauche du 9 et le 7 à droite. Le nombre 5 entre les neuf caractères; il est appelé à cause de cela *nombre circulaire*, car il roule sur lui-même. Quand tu multiplies 5 par 9 on a 45, 4 à droite et 5 à gauche; ensuite 9 par 4 donne 36, 3 à droite et 6 à gauche, etc.

» C'est pourquoi les signes d'un nombre multiplié par lui-même ou par un autre, sont au nombre de neuf; c'est pourquoi aussi les savants de l'Inde ont construit tous les nombres au moyen de neuf signes [**]: mais, moi, j'écrirai à leur place des lettres hébraïques. Toujours, si tu as un nombre renfermant des unités de la première classe, savoir, des dixaines, tu écriras d'abord les unités et ensuite les dixaines; si les unités manquent et s'il y a des dixaines, tu feras l'image d'une petite roue [***] au commencement pour indiquer qu'il n'y a pas de nombre du premier degré, et ensuite on écrira les dixaines; s'il y a des dixaines et des centaines, on écrira d'abord le galgal, puis les dixaines en deuxième, et ensuite les centaines en troisième; et s'il y a des mille, en quatrième; et les dix mille, à la cinquième; et des cent mille, à la sixième; et des mille mille, à la septième, et ainsi indéfiniment. Si l'on a des unités, des centaines et point de dixaines, on écrira en premier les

[*] Je supprime ici une observation grammaticale sur le nom hébreu de vingt qui est *esrime*, et par analogie devrait être *esraime*.

[**] Il y a ici dans le texte trois points qui renvoient à la marge où on lit : « Ils ont donné des figures que voici. » Puis, dans le texte, on trouve écrit sur une ligne de droite à gauche, nos chiffres

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Il me paraît évident que c'est une insertion étrangère à l'auteur. Il faudrait collationner d'autres manuscrits.

[***] *Galgal* en hebreu.

unités, le galgal en deuxième et les centaines en troisième, et de cette manière... [*]. Le galgal est comme la paille qui roule poussée par le vent; il n'est que pour conserver *les degrés;* en langue étrangère il se nomme *sifra*.

» Après avoir mentionné ceci, je vais expliquer les *sept* portes de l'Arithmétique, car elles sont au nombre de *sept* [**] :

PREMIÈRE PORTE. — *Multiplication d'un nombre par lui-même ou par un autre; multiplication d'un nombre par deux autres ou davantage; multiplication de plusieurs nombres par plusieurs nombres.*

DEUXIÈME PORTE. — *Division d'un nombre composé d'une classe par des unités; ou de deux classes par des unités; des classes supérieures par des classes inférieures.*

Je donnerai aussi les preuves de la multiplication et de la division.

TROISIÈME PORTE. — *Addition d'unités avec des classes; des classes entre elles.*

QUATRIÈME PORTE. — *Soustraction; preuves de l'addition et de la soustraction.*

CINQUIÈME PORTE. — *Fractions de plusieurs espèces; entiers sur entiers, entiers avec des fractions, entiers et fractions avec entiers et fractions, fractions avec fractions, fractions avec fractions de fractions, fractions avec fractions de fractions de fractions; le tout soit pour multiplier, soit pour diviser, soit pour ajouter, soit pour soustraire; avec des preuves.*

SIXIÈME PORTE. — *Proportions: très-important. Par-là on résout beaucoup de questions difficiles.*

La plupart des raisonnements d'Astronomie sont tirés de ce chapitre.

---

[*] Le texe est interrompu. Il y a un renvoi à la marge où on lit d'une écriture différente du texte : « On fera pour le reste. On placera le galgal selon le besoin, soit au commencement, soit au milieu, et même deux galgals s'il le faut; la forme du galgal est celle-ci Ʊ. »

[**] Il est presque inutile d'avertir que dans le manuscrit, il n'existe aucune espèce de séparation. Tout est écrit de suite.

SEPTIÈME PORTE. — *Racines carrées et caractères des carrés parfaits.*

Ils sont en grand nombre. Ce chapitre est le plus difficile de tous.

On ne peut rien comprendre à l'explication des planètes, si l'on ne comprend ce chapitre; les cordes des arcs de cercle en sont des conséquences.

Nous allons présenter l'analyse succincte de ces sept portes, et, pour abréger, nous écrirons les procédés de l'auteur en signes algébriques.

PREMIÈRE PORTE.

Avant d'en venir au procédé général, l'auteur donne divers procédés pour des cas particuliers.

Premier exemple.

$$30 \times 200; \quad 3 \times 2 = 6;$$

d'où

$$30 \times 200 = 6000.$$

Troisième exemple.

$$29 \times 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1 = 900 - 1 = 899.$$

Cinquième exemple.

$$15^2; \quad \frac{15}{3} = 5, \quad 5^2 = 25, \quad 25 \times 10 = 250,$$
$$250 - 5^2 = 225 = 15^2.$$

Sixième exemple.

$$24^2: \quad \frac{24}{3} = 8, \quad 8^2 = 64; \quad 64 \times 10 = 640;$$
$$640 - 64 = 576 = 24^2.$$

Huitième exemple.

$$22^2; \quad 22 = 21 + 1; \quad \frac{21}{3} = 7; \quad 7^2 = 49; \quad 49.10 = 490;$$
$$490 - 7^2 = 441 = 21^2; \quad 21^2 + 21 + 22 = 484 = 22^2.$$

Règle générale.

Premier exemple.

	1	2	7	
	3	5	5	
3	2	3	3	5
	1	1	5	
	6	1		
	5	5		
4	5	0	8	5

» Soit à multiplier 127 par 355. On écrit le multiplicateur en bas; on multiplie 7 par 5 et l'on écrit le produit 35 sur une première ligne horizontale; on multiplie 7 par 50; j'écris 5 dans une seconde ligne sous les dixaines de la première, et 3 dans cette première ligne à côté des dixaines; je multiplie 71 par 300; j'écris 1 dans la deuxième ligne sous les centaines de la première et 2 à côté de ces centaines; je multiplie 20 par 5; j'écris dans la troisième ligne, sous les centaines de la première, et ainsi de suite; faisant la somme, on obtient le produit cherché. »

Nous avons abrégé; mais dans le texte, la multiplication est indiquée jusqu'à 100 par 300.

Le chapitre est terminé par la preuve de la multiplication par 9, telle que nous la pratiquons.

DEUXIÈME PORTE.

Division.

L'auteur débute par ces considérations :

« Tout nombre est composé d'unités; mais l'unité n'est pas un nombre, car un nombre est susceptible d'altération, de multiplication, et de division; or l'unité n'est pas soumise à ces accidents; donc l'unité

n'est pas un nombre [*]; d'ailleurs un nombre entier est précédé d'un autre plus petit et suivi d'un plus grand; tandis que 1 est suivi de 2, mais n'est précédé de rien.

» Les astronomes ont divisé le zodiaque en 12 signes; parce que 12 a pour diviseurs 2, 3, 4, 6.

» Ils ont partagé le signe en 30 degrés, parce que 30 a pour diviseurs 2, 3, 5, 6, 15.

» Ils ont de même divisé la circonférence en 360 parties; car 360 divisé par 2, 3, 4, etc., donne des nombres entiers.

Premier exemple. Diviser 9000 par 70,

```
    4
9 0 0 0
  1 2 8
    7 0
```

J'écris le dividende 70 au-dessous du diviseur, unité sur unité et dixaines sur dixaines, en laissant un intervalle pour écrire le quotient entre; je divise 9 par 7; le quotient est 1, que j'écris entre les deux sous les centaines; il reste 2; je divise 20 par 7; j'écris le quotient 2 à côté de l'unité; il reste 6; je divise 60 par 7; j'écris le quotient 8 à côté de 2; il reste 4 que j'écris au-dessus des dixaines; le quotient est 128 et le reste 40.

Deuxième exemple. 20000 à diviser par 90. De la même manière.

Troisième exemple. 4032 à diviser par 30:

```
    1 2
4 0 3 2
  1 3 4
    3 0
```

[*] C'est l'opinion d'Euclide (liv. VII, *Définition* 1), et des philosophes grecs. Ibn-Esra a aussi en vue une proposition théologique. Chez les écrivains juifs, science, histoire, poésie, tout se rattache à Dieu. C'est l'idée dominante dans toute cette monotone littérature.

Quatrième exemple. 8213 à diviser par 353:

```
      9 4
8 2 1 3
      2 3
    3 5 3
```

« 3 dans 8, 2 fois; j'écris 2 sous les dixaines; 2 fois 3 font 6; j'ôte 6 de 8, il reste 2; 2 fois 5 font 10; j'ôte de 22, il reste 12; 2 fois 3 font 6; j'ôte de 11, reste 5; ainsi il reste 115; 3 dans 11, 3 fois; j'écris à côté de 2; $3 \times 3 = 9$; 9 de 11, reste 2; $3 \times 5 = 15$; 15 de 25, il reste 10; $3 \times 3 = 9$; 9 de 13, il reste 4. Ainsi le quotient est 23 et il reste 94. »

Observation. On voit que ce procédé est très-long, parce qu'en multipliant le diviseur par le chiffre du quotient, on fait la multiplication de gauche à droite, tandis que nous la faisons de droite à gauche.

Les autres exemples sont relatifs à des nombres qui contiennent des zéro ou donnent des zéro au quotient.

La preuve de la division par 9 termine ce chapitre.

L'auteur ne donne pas de règles générales pour faire les opérations, mais des exemples qui servent à faire connaître ces règles.

TROISIÈME PORTE.

Sommes.

Énoncé. La somme des nombres naturels est $\frac{(1+n)n}{2}$; et l'auteur ajoute ces mots: « J'ai découvert que cette somme $= \frac{n^2+n}{2}$; » le tout sans démonstration.

Question. 465 étant la somme d'une progression naturelle des nombres, combien y a-t-il de termes?

Solution. Doublez, il vient 930; la racine carrée la plus approchée est 30; c'est le nombre de termes.

Enoncé. La somme des carrés des nombres naturels est

$$\frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{2n+1}{3},$$

sans démonstration.

On donne ensuite des règles pour additionner des nombres complexes renfermant des degrés, minutes, secondes et tierces.

Observation. Les Arabes connaissaient la numération décuple, celle des puissances positives de 10, mais ignoraient la numération décimale ou celle des puissances négatives de 10; et, chose fort singulière, ils l'ont remplacée par la division sexagésimale; ils appelaient les soixantièmes, des minutes, les soixantièmes au carré des secondes, et ainsi de suite. De même que nous réduisons les fractions ordinaires en fractions décimales, les Arabes les réduisent en fractions sexagésimales, ou en minutes, secondes, tierces, etc. Ils cherchent ainsi les racines carrées et cubiques à moins d'une minute, d'une seconde près.

Mais il est bon de remarquer que les Arabes traitent ces fractions comme des nombres complexes et n'ont pas une numération sexagésimale; tandis que nous avons une numération décimale, avantage immense. Il serait fort curieux de savoir quand cette numération s'est établie en Europe. Je la crois très-récente.

Les règles que donne ici l'auteur pour l'addition des degrés, minutes et secondes, sont donc analogues à celles qu'on trouve dans nos traités d'Arithmétique, pour l'addition des quantités décimales. Il en est de même dans la porte suivante.

QUATRIÈME PORTE.

Règles pour la soustraction des nombres complexes, degrés, minutes, secondes.

CINQUIÈME PORTE.

Fractions.

Considérations diverses sur l'importance et l'utilité des fractions, entre autres, dans la théorie des nombres irrationnels. Il énonce, en passant, que la somme de la suite naturelle des nombres impairs engendre tous les carrés.

Règle ordinaire pour réduire les fractions au même dénominateur, et divers cas particuliers. — Élévation d'une fraction au carré.

1°. Multiplication des fractions :

Premier exemple.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25} = \frac{2}{5} + \frac{2}{25}.$$

Deuxième exemple.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}; \text{ trois procédés.}$$

Premier procédé.

$$3 \times 4 = 12; \quad \frac{2}{3} \times 12 = 8; \quad \frac{3}{4} \times 12 = 9; \quad 8 \times 9 = 72;$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}.$$

Deuxième procédé.

$$2 \times 3 = 6; \quad 3 \times 4 = 12; \quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Le troisième est analogue au premier.

2°. Multiplication des nombres fractionnaires :

Premier exemple.

$$3\frac{4}{5} \times 6\frac{7}{8}; \text{ trois procédés.}$$

Premier procédé.

$$3 \times 6 = 18; \quad 3 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{8} = 2\,\frac{5}{8}; \quad 18 + 2\,\frac{5}{8} = 20\,\frac{5}{8};$$

$$6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = 4\,\frac{4}{5}; \quad 20\,\frac{5}{8} + 4\,\frac{4}{5} = 24 + \frac{57}{40} = 25\,\frac{17}{40};$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{28}{40}; \quad \frac{28}{40} + \frac{17}{40} = \frac{45}{40} = 1\,\frac{5}{40} = 1\,\frac{1}{8}:$$

ainsi

$$3\,\frac{4}{5} \times 6\,\frac{7}{8} = 26\,\frac{1}{8}.$$

Deuxième procédé.

$$3\,\frac{4}{5} = \frac{152}{40}; \quad 6\,\frac{7}{8} = \frac{275}{40}; \quad 152 \times 275 = 41800;$$

$$\frac{41800}{1600} = 26\,\frac{200}{1600} = 26\,\frac{1}{8}.$$

Troisième procédé.

$$3\,\frac{4}{5} = \frac{19}{5}; \quad 6\,\frac{7}{8} = \frac{55}{8}; \quad \frac{19}{5} \times \frac{55}{8} = \frac{1645}{40} = 26\,\frac{5}{40} = 26\,\frac{1}{8}.$$

De là on passe aux fractions qu'un *homme ne peut prononcer.*

Pour comprendre cette locution, il faut se rappeler, qu'en français, nous exprimons tout dénominateur, quelque grand qu'il soit, au moyen de la terminaison *ième;* il n'en est pas ainsi en hébreu; on ne peut aller que jusqu'à 10; mais pour dire cinq onzièmes, Ibn-Esra dit : cinq de onze; et il appelle cela une fraction qu'on ne peut exprimer. Quelquefois pour des dix-huitièmes, il dit des tiers de sixième: de même que les femmes disent un demi-quart pour $\frac{1}{8}$ ou un demi-tiers pour $\frac{1}{6}$.

Premier exemple.

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{11};$$

la deuxième fraction est ineffable.

$$\frac{3}{7} = \frac{33}{77}; \quad \frac{5}{11} = \frac{35}{77}; \quad 33 \times 35 = 1155; \quad \frac{1155}{77} = 15;$$

ainsi

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{15}{77}, \text{ à peu près } \frac{1}{5}.$$

Deuxième exemple.

$$\frac{9}{13} \times \frac{17}{19};$$

deux fractions ineffables.

Il réduit d'abord les fractions au même dénominateur, les multiplie ensemble, et fait ensuite la simplification. Il se croit obligé de prendre ce singulier détour, parce qu'il a commencé par expliquer la multiplication pour le cas où les deux dénominateurs sont égaux; et il ramène tout à ce cas-là.

3°. Fractions de fractions :

Premier exemple.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{5} \times \frac{6}{7} \text{ de } \frac{1}{8};$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 8 = 1680; \quad \frac{1}{5} \times 1680 = 336;$$

$$\frac{1}{4} \times 336 = 84; \quad \frac{2}{3} \times 84 = 56; \quad \frac{1}{8} \text{ de } 1680 = 210;$$

$$\frac{1}{7} \text{ de } 210 = 30; \quad \frac{6}{7} \text{ de } 210 = 180; \quad 56 \times 180 = 10080; \quad \frac{10080}{1680} = 6.$$

Ainsi

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{5} \times \frac{6}{7} \text{ de } \frac{1}{8} = \frac{6}{6.5.7.8}.$$

4°. Division de fractions : comme de nos jours.

L'auteur quitte ici la division des fractions, par la raison, dit-il, qu'on n'a pas grand besoin de cette opération, et il vient à l'addition des fractions.

Premier exemple.

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{7};\quad \frac{2}{5}\text{ de }35=14;\quad \frac{5}{7}\text{ de }35=25;$$

donc

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{7}=\frac{14+25}{35}=\frac{29}{35}=9\,\frac{4}{35}.$$

Ne pouvant exprimer les trente-cinquièmes, il dit que ce sont les $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{7}$.

Observation. L'auteur n'a aucune marque pour désigner les fractions. Quand s'est introduit l'usage d'écrire le numérateur au-dessus du dénominateur et les séparant par un trait, soit oblique, soit horizontal? Les plus grands progrès des sciences exactes sont dus à l'introduction de ce genre de signes, qui manquent encore à la théorie des nombres. Nous n'avons aucun signe pour désigner un nombre entier, un nombre premier, des nombres premiers entre eux, etc., etc. La même lacune se fait sentir en mécanique pour distinguer les diverses espèces d'unités dont la confusion est une cause principale des difficultés de cette science.

Deuxième exemple.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9};\ \text{deux procédés.}$$

Premier procédé.

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{9}+\frac{4}{5.9};\qquad \frac{1}{7}=\frac{1}{9}+\frac{2}{7.9};$$

donc

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\left(1+\frac{3}{5.7}\right)=\frac{4}{9}+\frac{3}{5.7.9}.$$

Deuxième procédé. Par la réduction au même dénominateur.

Question. Trouver le nombre qui, augmenté de son $\frac{1}{9}$ et de son $\frac{1}{30}$, fasse 50?

Solution.

$$9 \times 10 = 90; \quad \frac{1}{9} \text{ de } 90 + \frac{1}{10} \text{ de } 90 = 19; \quad 19 + 90 = 109;$$

$$50 \times 19 = 4500; \quad \frac{4500}{109} = 41\,\frac{31}{109}, \text{ nombre cherché.}$$

On fait la vérification.

Une deuxième question de ce genre est résolue de la même manière.

Le chapitre est terminé par des calculs relatifs à des conversions de nombres en degrés, minutes, secondes, et multiplications de ces nombres, et il dit que, par ce moyen, *Ptolémée le roi* a calculé les cordes des arcs de cercle. Ibn-Esra confond l'astronome avec le roi, erreur commune à presque tous les écrivains juifs. Elle s'est même glissée, par inadvertance, dans l'ouvrage hébreu sur la comète de Halley, publié à Wilna en 1835, par M. Slonymski, israëlite polonais, familiarisé avec les méthodes de la *Mécanique céleste*.

SIXIÈME PORTE.

Proportion.

Ce chapitre commence par les définitions des proportions arithmétiques et géométriques à trois termes et de la moyenne proportionnelle : ensuite, des proportions à quatre termes; ensuite, sans démonstration, la proposition suivante :

La somme des carrés de quatre termes, en proportion géométrique, est égale au carré de la somme des extrêmes plus le carré de la différence des moyens, ou bien au carré de la somme des moyens plus le carré de la différence des extrêmes.

Définition de la proportion harmonique; elle consiste, comme on sait, dans cette relation entre trois quantités a, b, c,

$$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}.$$

connaissant deux de ces quantités, trouver la troisième; trois questions avec leurs solutions.

Règle de trois. Divisez le produit des extrêmes par le moyen connu.

Ibn-Esra recommande de figurer le *galgal* pour le terme inconnu: de sorte que le galgal tient lieu de la lettre x, pour désigner l'inconnue. Ainsi la proportion $2 : 4 :: 6 : x$ s'écrit ainsi $\overset{\mathcal{S}}{2}.\overset{\mathcal{S}}{4}.\overset{\mathcal{S}}{6}.\bar{\sigma}$.

On trouve ensuite les solutions de plusieurs questions relatives à la règle de société, de commerce, de change, comme dans les traités modernes.

Les monnaies sont le florin d'or à divers titres, et le dinar valant 12 pechoutimes.

Problèmes exigeant l'emploi de la règle de trois composée; questions des courriers allant au-devant l'un de l'autre ou se poursuivant, et autres questions de fausse position qu'on résout depuis Viète par des équations du premier degré. Nous n'en rapporterons qu'une seule dont l'auteur donne deux solutions.

Question. Une somme de 120 florins est à partager entre quatre frères : chacun d'eux exhibe un testament en vertu de quoi le premier (A) prétend avoir tout; le deuxième (B) la moitié; le troisième (C) le tiers; et le quatrième (D) le quart; combien chacun doit-il recevoir?

Solution des Savants étrangers.

A prend $\frac{120}{125} \times 60 = 57\frac{3}{5}$,

B — $\frac{120}{125} \times 30 = 28\frac{4}{5}$,

C — $\frac{120}{125} \times 20 = 19\frac{1}{5}$,

D — $\frac{120}{125} \times 15 = 14\frac{2}{5}$.

Solution des Savants israëlites. (Traduction textuelle.)

« Les trois premiers disent à D : tu prétends le $\frac{1}{4}$ ou 30 florins; nous avons même droit que toi à ces 30 florins; ainsi prenons chacun $7\frac{1}{2}$ florins et retire-toi avec ta part.

» Les deux premiers disent ensuite à C : tu prétends au tiers ou à

40 florins; tu as déjà eu ta part aux 30 florins; il ne reste donc que 10 florins, auxquels nous avons des droits égaux; chacun $3\frac{1}{3}$, et retire-toi avec ta part.

» Le premier dit à B : tu prétends à la moitié ou à 60 florins; tu as déjà eu ta part de 40, et il reste 20 à partager entre nous deux, chacun 10.

» Le premier A prend tout le reste. Ainsi

D reçoit		$7\frac{1}{2}$	$= 7\frac{3}{6}$.
C »		$7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}$	$= 10\frac{5}{6}$,
B »		$7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 10$	$= 20\frac{5}{6}$.
A »		$7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 10 + 60$	$= 80\frac{5}{6}$.
	Total....		120.

Observation. On reconnaît dans cette seconde solution la logique tortueuse du talmudiste. Pour traiter la question généralement dans ce sens, il faut trouver la somme de la série finie

$$\frac{1}{n\,(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)(n-3)^2} + \text{etc.};$$

et l'on parvient à cette relation connue,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots \frac{1}{2.1} = 1,$$

n étant un nombre entier positif.

Le chapitre est terminé par la manière de se servir des parties proportionnelles dans les tables astronomiques, et de réduire ces parties en minutes, secondes, etc.

SEPTIÈME PORTE (page 23).

Extractions de racines.

Caractères auxquels on peut reconnaître les carrés parfaits, par les chiffres initiaux.

Il extrait la racine carrée de 200, d'après la méthode moderne; et pour celle de 300, il s'y prend ainsi : la différence entre 400 et 300 est 100; la racine de 400 est 20; 100 divisé par 2×20, donne 3 pour quotient entier; ainsi la racine de 300 est $20 - 3 = 17$; puis, il trouve cette même racine par la manière ordinaire. A la page 24, on lit cette singulière annonce :

« Maintenant, je vais te découvrir une partie de ce mystère, et pourquoi c'est ainsi : Sache que deux des grandes causes, l'une va vers l'orient et l'autre vers l'occident, et la force supérieure est une entre les deux. »

Ce mystère consiste en ceci : 1 et 9 au carré donnent le même chiffre initial.
2 et 8 *idem.*
3 et 7 *idem.*

Mais 5 est un nombre *circulant*, se reproduisant lui-même.

On trouve ensuite les énoncés suivants :

$$a^2 \times b^2 = (ab)^2,$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$(a+b)^2 = 2(a^2+b^2) - (a-b)^2,$$

$$(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (b-c)^2.$$

$$(a+b+c+d)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2) - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (a-d)^2 - (b-c)^2 - (b-d)^2 - (c-d)^2$$

Observation. De ces identités on peut conclure que le double de la somme de deux carrés est égal à la somme de deux carrés; que le triple de la somme de trois carrés est égale à la somme de quatre carrés, etc., etc.

Racines carrées des fractions; exemples pris dans la division sexagésimale astronomique.

Premier exemple. Soit à extraire la racine carrée de $7^\circ.50'.24''$, c'est-à-dire de

$$7 + \frac{50}{60} + \frac{22}{60^2};$$

voici le procédé, écrit algébriquement,

$$7^\circ.50'.24'' = 7^\circ.48'.2'.24'' = 7^\circ.48'.144'' = 7^\circ.48'.(12'')^2:$$

faisons

$$\sqrt{7^\circ.48'.(12'')^2} = 3^\circ - a,$$

$$-2.48'.(12'')^2 = -6a + a^2 = -72'.(12'')^2.$$

d'où

$$a = \frac{72}{6} = 12';$$

ainsi la racine cherchée est

$$3^\circ - 12' = 2^\circ.48'$$

à peu près.

L'auteur expose ensuite tres-obscurément une méthode d'approximation procédant d'après les puissances négatives de 60. Elle s'exécute ainsi : Quand on a une première approximation, on l'élève au carré,

et retranche ce carré du nombre donné; on divise le reste par le double de la racine; l'on ajoute le quotient à la première approximation, ou bien on l'en retranche, selon que le quotient est positif ou négatif, on obtient une seconde approximation, et ainsi de suite.

Questions sur la longueur d'une échelle placée contre un mur, résolues à l'aide du théorème de Pythagore.

Questions relatives au cercle. Il dit qu'on peut considérer dans le cercle, six choses, dont deux étant connues, les quatre autres sont déterminées. Parmi ces six choses, il y un mot hébreu, kafal, *double,* dont je ne comprends pas l'application.

Solution de ce problème. Connaissant la corde et la flèche, trouver le diamètre.

Ensuite, il fait mention (page 29) d'une propriété mystico-géométrique du cercle, dont il parle aussi d'une manière extrêmement obscure, dans un autre de ses ouvrages, intitulé *Jesod More,* à la fin du chapitre XI[*]. C'était une énigme indéchiffrable; toutefois, M. Eichenbaum, d'Odessa, avec une admirable sagacité, en a découvert le mot, et a publié son incontestable explication dans le *Kerem hemed,* ouvrage périodique hébreu, édité à Tarnopol et imprimé à Vienne[**].

Voici cette mirifique propriété. Inscrivant dans un cercle un triangle isoscèle ayant sa base perpendiculaire aux $\frac{2}{3}$ du rayon, et pour hauteur les $\frac{4}{3}$ du rayon, l'aire de ce triangle

$$= \frac{8}{9}\sqrt{2}\,r^2 = 1{,}25\,r^2 = A;$$

---

[*] M. le docteur Creizenach, connu par un Traité d'algèbre, où l'on trouve une nouvelle démonstration des formules de Cramer, a fait paraître l'année dernière, à Francfort-sur-Mein, une traduction allemande et latine en regard du texte du *Jesod More*.

[**] *Kerem hemed,* 1839, tome IV, page 113. M. Creizebach a adopté, dans sa traduction, cette explication, confirmée aussi par notre manuscrit.

à un centième de r^2 près où r désigne le rayon: le périmètre de la circonférence

$$= 2\pi r = 6,28r = \mathrm{B}.$$

d'où

$$\frac{\mathrm{B}r}{\mathrm{A}} = 5\,\frac{3}{125},$$

ou à peu près

$$\mathrm{B}r = 5\mathrm{A};$$

si nous prenons donc pour diamètre le nombre 10, on aura

$$\mathrm{B} = \mathrm{A},$$

c'est-à-dire que l'aire du triangle inscrit est exprimée par les mêmes chiffres que le périmètre, et cette propriété n'a lieu que pour le diamètre 10; or 10 est la valeur numérale de la lettre Jod, qui est la lettre initiale du nom tétragramme Jehova: il existe donc une relation mystique entre ce nom et les propriétés du cercle.

Observation. J'ai consigné ici cette élucubration mathématico-cabalistique, comme un échantillon du genre; encore n'en a-t-on pas toujours de cette facture. J'ai lu, il y a bien des années, les principales œuvres cabalistiques, et cette lecture m'a confirmé dans l'opinion, contrairement à ce que pensent des hommes dont j'estime les travaux, que ce serait un temps déplorablement perdu que celui qu'on consacrerait à l'étude des cabalistes, alchymistes, théosophes et mystiques de toute région. D'ailleurs cette étude n'est pas sans dangers: rien n'est contagieux comme les folies transcendantes; la plus forte intelligence peut y faire naufrage. Lorsqu'on a longtemps médité sur certaines aberrations abstruses, et qu'on n'a épargné aucune peine pour les comprendre, alors, par l'instigation de l'inévitable démon qui a nom amour-propre, on finit par se dissimuler l'extravagance de ces recherches, pour en

proclamer même l'importance et en soutenir la réalité ontologique : cela s'est vu et se verra toujours.

Ici se termine le manuscrit, dont les neuf dernières lignes sont inintelligibles pour moi. Sur la même page, après la fin, on lit douze lignes consacrées à cette question : De trois choses, la corde, la flèche et le diamètre, connaissant deux, trouver la troisième. Ces lignes sont-elles d'Ibn-Esra ?

Les travaux de M. Chasles, si érudit, si consciencieux, ont avancé beaucoup nos connaissances sur l'histoire de l'Arithmétique chez les anciens. Il paraît que dans les quatre opérations, ils procédaient à peu près comme nous. La numération parlée étant décimale de toute antiquité, on traitait les classes d'unités comme des nombres complexes, et qu'on distinguait les uns des autres à l'aide de signes quelconques écrits en tête de ces nombres, *apices ;* comme nous faisons pour les toises, les pieds, les pouces, etc.; des cadres creux remplis de poussière (en hébreu, *abaque*) et à fond blanc, servaient probablement à faire et à défaire les opérations. Le *Talmud,* ouvrage du IVe siècle, défend, un jour du sabbat, de tracer des caractères *dans l'abaque,* c'est-à-dire dans la poussière des écrivains. (*Sabbat,* p. 104.) Les Indiens se servent encore de ces abaques dans leurs écoles, et nous aussi dans l'enseignement mutuel. Les traités sur l'usage de l'abaque paraissent être très-nombreux depuis le XIIe siècle. L'arithmétique d'Ibn-Esra n'a précédé que d'environ un siècle l'*Abacus* de Fibonacci. Ils suivent à peu près la même marche, donnant la multiplication avant l'addition, etc. On sait d'ailleurs que Fibonacci a appris ses méthodes chez des négociants juifs, à Oran. Il est problable que ce sont des commerçants de cette nation qui auront adopté les chiffres arabes, si commodes pour la tenue des livres. Introduits par eux sur les côtes de Barbarie, ces chiffres se seront répandus de là en Italie, en Espagne et dans le reste de l'Europe. Boëce avait déjà une idée confuse de l'existence de ces chiffres et de leurs noms, que le savant M. Vincent nous a appris, avec une grande probabilité, être d'origine semitique.

DES PROPRIÉTÉS OSCULATRICES

DE DEUX SURFACES EN CONTACT PAR UN POINT;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

Dans un Mémoire ayant pour titre : *Construction des tangentes en un point multiple d'une courbe plane ou à double courbure dont l'équation est inconnue*, publié dans le vingt-et-unième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai donné la construction géométrique des tangentes au point multiple que présentait la courbe intersection de deux surfaces en contact par un point, en employant comme surfaces auxiliaires deux surfaces du second ordre et osculatrices, par leur sommet, aux deux surfaces données. Personne n'avait encore songé à l'emploi de ces surfaces auxiliaires pour résoudre le problème des tangentes au point multiple. Je déduisis facilement, de la méthode que j'avais employée, la construction géométrique de la tangente en un point de la courbe de contact de deux surfaces, tangente dont on ignorait encore la construction en géométrie descriptive, tout comme on ignorait la construction des tangentes au point multiple.

Plus tard, dans un Mémoire publié dans le vingt-sixième cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, et qui avait pour titre : *Des indicatrices des divers ordres de contact entre deux surfaces et des conditions géométriques auxquelles doivent satisfaire deux surfaces ayant un point de contact pour qu'elles aient un contact du $n^{ième}$ ordre tout autour de ce point*, j'ai démontré que, si deux surfaces en contact par un point, avaient suivant trois directions partant de ce point un contact du second ordre, elles avaient dès-lors un contact du second ordre tout autour du même point; on déduit évidemment de ce théorème que

deux surfaces ayant un contact du premier ordre en un point m, peuvent avoir un contact du second ordre, suivant deux directions, en partant de ce point.

Toutefois, pour compléter les théorèmes que j'ai établis sur l'osculation des surfaces au moyen des procédés que met à notre disposition la géométrie descriptive, je me propose, dans cette Note, de rechercher directement :

Si deux surfaces, ayant un contact du premier ordre en un point, ne peuvent pas avoir un contact du second ordre, suivant certaines directions, à partir de ce point?

La solution directe de cette question nous conduira à quelques particularités géométriques qui ne sont pas sans intérêt.

Soient données deux surfaces Σ et Σ' en contact par un point m; désignons par T leur plan tangent commun en m, et par N leur normale commune en ce même point m.

Je désigne par θ et t les tangentes aux lignes de courbure de la surface Σ se croisant en m.

θ correspondra à la ligne de courbure maximum, et R sera le rayon de courbure maximum de Σ:

t correspondra à la ligne de courbure minimum, et r sera le rayon de courbure minimum de Σ.

On aura de même θ' et R′ pour la courbure maximum de Σ', et t' et r' pour la courbure minimum de Σ'.

Désignons par α l'angle que font entre elles les droites θ et θ', dès-lors nous connaissons l'angle que θ fait avec les trois autres tangentes, puisque θ et t, θ' et t' se croisent en angle droit.

Cela posé, désignons par O et O′ les surfaces du second ordre, respectivement osculatrices au point m aux surfaces Σ et Σ' et par leur sommet.

Supposons que ces deux surfaces O et O′ sont des surfaces ayant un centre, ellipsoïde ou hyperboloïde à une nappe, suivant que la surface à laquelle chacune d'elles est osculatrice à ses rayons de courbure tournés dans le même sens ou en sens opposé.

En établissant que les deux surfaces O et O′ ont même centre situé sur la normale N et à une distance c du point m, on établit que si ces deux surfaces se coupent, elles se couperont suivant deux courbes planes, ou se toucheront suivant une courbe plane, les plans de ces courbes passant par la normale N.

Par conséquent on voit que les deux surfaces Σ et Σ' pourront, en général, 1° avoir un contact du second ordre suivant deux directions, ou 2° suivant une seule direction, ou 3° suivant aucune direction.

Discutons maintenant toutes les particularités qui peuvent se présenter, suivant que les surfaces O et O′ seront des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une nappe ou des cylindres, et suivant les relations de grandeur qui peuvent exister entre les rayons de courbure R, r, R′, r', des surfaces données Σ et Σ', et aussi suivant la grandeur de l'angle α que font entre elles les tangentes θ et θ'.

Menons par le centre x, commun aux deux surfaces O et O′, un plan P parallèle au plan tangent T.

Ce plan P coupera respectivement ces deux surfaces O et O′, suivant des sections coniques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ qui pourront être :

1°. Deux ellipses si les deux surfaces Σ et Σ' ont toutes deux leurs rayons de courbure dirigés dans le même sens sur la normale N;

2°. Deux hyperboles si les deux surfaces Σ et Σ' ont toutes deux leurs rayons de courbure dirigés en sens opposé sur la normale N;

3°. Une ellipse et une hyperbole si l'une des surfaces Σ, par exemple, a ses rayons de courbure dirigés en sens opposé, l'autre surface Σ' les ayant dirigés dans le même sens sur la normale N;

4°. Une ellipse et deux droites parallèles;

5°. Une hyperbole et deux droites parallèles;

6°. Deux couples de droites parallèles.

Dans les quatrième et cinquième cas l'une des surfaces Σ et Σ' est une surface développable, et dans le sixième cas les deux surfaces Σ et Σ' sont toutes deux développables.

On voit de suite que, les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, ou 1° se couperont en

quatre points formant les sommets d'un parallélogramme dont les diagonales se croiseront au centre x commun aux deux courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, et ces diagonales donneront les directions suivant lesquelles le contact du second ordre existe entre les surfaces Σ et Σ'; ou 2° se toucheront en deux points extrémités d'un diamètre commun, lequel donnera la direction unique suivant laquelle le contact du second ordre existe entre les surfaces Σ et Σ'; ou 3° n'auront aucun point commun, ce qui indiquera que les deux surfaces Σ et Σ' ne peuvent avoir de contact du second ordre.

On voit aussi de suite, par ce qui précède, que si deux surfaces développables ont une génératrice droite commune, et un contact du premier ordre tout le long de cette génératrice, elles n'auront jamais un contact du second ordre, quelle que soit la direction que l'on suive en partant de la génératrice commune; en sorte que tout autour de chaque point de la génératrice commune, les deux surfaces développables n'auront qu'un contact du premier ordre; mais si deux surfaces développables sont en contact par un point m, et que les génératrices passant par ce point se croisent, au lieu de se superposer, alors il existera toujours deux directions à partir du point m suivant lesquelles les deux surfaces auront un contact du second ordre.

Désignons par a et a' le demi grand axe, et par b et b' le demi petit axe des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

L'équation de la courbe $\mathcal{E}$ sera, en prenant l'axe des x parallèle à la tangente $\mathfrak{s}$ et l'axe des y parallèle à la tangente t,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation de la courbe $\mathcal{E}'$ sera, par rapport aux mêmes axes,

$$x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a'^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b'^2}\right) + 2xy\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2}\right) + y^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a'^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b'^2}\right) = 1.$$

comme l'on a

$$R = \frac{a}{c}, \quad r = \frac{b}{c}, \quad R' = \frac{a'^2}{c}, \quad r' = \frac{b'^2}{c}.$$

L'équation de $\mathfrak{S}$ pourra s'écrire :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{r} = 1,$$

et l'équation de $\mathfrak{S}'$ pourra s'écrire

$$(2) \quad x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{R'} + \frac{\sin^2\alpha}{r'}\right) + 2xy\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{r'}\right) + y^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{R'} + \frac{\cos^2\alpha}{r'}\right) = 1.$$

Les deux courbes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ ayant même centre se couperont en quatre points symétriquement placés par rapport à l'origine des coordonnées et par rapport aux axes des x et des y, ou, en d'autres termes, les quatre points seront les sommets d'un parallélogramme dont le centre sera à l'origine des coordonnées.

Si donc entre l'équation $y = x \operatorname{tang}\delta$ et les équations (1) et (2) on élimine les variables x et y, on aura une équation du second degré en $\operatorname{tang}\delta$, de laquelle on tirera

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{Rr\sin\alpha\cos\alpha(r' - R') \pm \sqrt{M}}{rr'\sin^2\alpha - RR'\cos^2\alpha - r'R'}.$$

En écrivant pour abréger

$$(4) \quad rRr'R'[rr' + RR'\sin^2\alpha + (rR' + r'R)\cos^2\alpha - rR - r'R'] = M.$$

on pourra donc connaître la valeur de l'angle δ toutes les fois que l'on connaîtra les rayons de courbure maximum et minimum des deux surfaces Σ et Σ' pour le point m par lequel ces deux surfaces sont en contact, et l'angle α que font entre elles les deux tangentes θ et θ' aux lignes de courbure maximum des deux mêmes surfaces Σ et Σ' passant par ce même point m. Ainsi, les équations (3) et (4) serviront à déterminer l'angle δ que la tangente à la direction du contact du second ordre existant entre les surfaces Σ et Σ', fait avec la droite θ, tangente à la ligne de courbure maximum de la surface Σ.

On voit que la tangente trigonométrique de l'angle δ aura : 1° deux

valeurs lorsque M sera positif; 2° une seule valeur lorsque $M = 0$; et 3° deux valeurs imaginaires lorsque M sera négatif.

Lorsque l'on voudra se servir des formules (3) et (4) on devra se rappeler que l'on y a supposé que r, R, r', R', avaient tous le signe $+$; par conséquent on devra, suivant les hypothèses que l'on fera pour les surfaces Σ et Σ', donner aux rayons de courbure les signes $+$ ou $-$ suivant que la surface aura ses rayons de courbure tournés dans le même sens ou en sens opposés.

Supposons que l'angle α soit nul, alors les plans des sections principales maximum des deux surfaces Σ et Σ' se superposent ainsi que les plans de leurs sections principales minimum; en d'autres termes, les tangentes θ et θ' se confondent ainsi que les tangentes t et t'.

α étant nul, on a

$$\sin\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha = 1.$$

Dans ce cas la valeur de M devient

$$M = rRr'R'(R' - R)(r - r'),$$

et

$$5 \qquad \operatorname{tang}\delta = \pm\sqrt{\frac{rr'R(R' - R)}{R'(r - r')}}.$$

Ainsi tang δ a deux valeurs égales et de signes contraires, et ces deux valeurs seront :

1°. *Réelles* si l'on a en même temps

$$R' > R$$

et

$$r < r'.$$

ou

$$R' < R$$

et

$$r > r';$$

2°. *Imaginaires* si l'on a en même temps

$$R > R'$$

et

$$r' > r,$$

ou

$$R < R'$$

et

$$r' < r.$$

Si $r = r'$, tang δ devient infini, l'angle δ est droit et l'osculation du second ordre n'a lieu entre les deux surfaces Σ et Σ' que dans la direction de leurs lignes de plus petite courbure.

Si $R = R'$, tang δ devient nul, l'angle δ est nul et l'osculation du second ordre n'a lieu entre les deux surfaces Σ et Σ' que dans la direction de leurs lignes de plus grande courbure.

On pourrait faire diverses autres hypothèses, mais il est inutile d'entrer dans plus de détails sur ce point; l'on voit de suite que les valeurs que l'on obtiendra pour tang δ s'accorderont avec les relations de position que les sections coniques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ affecteront entre elles, en vertu des hypothèses que l'on fera touchant les relations de grandeur existant entre r, R, r', R' et la nature géométrique des surfaces Σ et Σ', ou, en d'autres termes, suivant que leurs surfaces osculatrices du second ordre O et O' seront des ellipsoïdes, ou des hyperboloïdes à une nappe, ou des cylindres.

Supposons que le point m contact des deux surfaces Σ et Σ' soit l'ombilic de la surface Σ'; alors la surface osculatrice du second ordre O' deviendra une sphère S du rayon ρ; et supposons que r, R et ρ soient dirigés dans le même sens, sur la normale commune N; on devra dès-lors, dans les formules (3) et (4), poser

$$r' = \rho$$

et

$$R' = \rho.$$

Cette supposition que la surface osculatrice O′ devient une sphère, entraîne la condition de $\alpha =$ un angle droit; et en effet la sphère ayant même courbure tout autour d'un de ses points, les deux surfaces O et S doivent être considérées comme ayant leurs plans de sections principales maximum et minimum superposés; en d'autres termes, on doit supposer que les tangentes θ et t', θ' et t se superposent, et dans ce cas on doit avoir

$$\rho < R$$

et

$$\rho > r.$$

En faisant dans les formules (3) et (4) les hypothèses indiquées, on aura

$$\text{tang}\,\delta = \pm\sqrt{rR\frac{(R-\rho)}{\rho-r}}. \tag{6}$$

On a donc deux valeurs égales et de signes contraires pour tang δ; par conséquent les directions du contact du second ordre font des angles égaux à droite et à gauche de la tangente θ; résultat que l'on devait prévoir, puisque dans ce cas, la courbe $\mathfrak{S}$ étant une ellipse, ou une hyperbole, ou deux droites parallèles, la courbe $\mathfrak{S}'$ est un cercle.

Et si l'on veut que les tangentes aux directions de l'osculation du second ordre entre les surfaces Σ et Σ' se croisent à angle droit, il faudra poser dans l'équation (6) tang $\delta = 1$. On aura donc

$$\rho - r = rR(R - \rho), \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{r(R^2+1)}{rR+1}.$$

Ainsi, si le rayon ρ de la sphère osculatrice S au point m de Σ' satisfait à l'équation (7), les deux surfaces Σ et Σ' auront une osculation du

second ordre, suivant deux directions à partir du point de contact m, et ces directions seront à angle droit.

Si l'on voulait qu'il n'y eût qu'une seule direction d'osculation, il faudrait poser $M = 0$, ou

$$2R\rho^2[(r\rho + R\rho)\sin^2\alpha + (r\rho + r\rho)\cos^2\alpha - rR - \rho^2] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{r+R}{2} \pm \frac{R-r}{2}, \tag{8}$$

ce qui donne deux valeurs pour ρ; pour l'une on a

$$\rho = r.$$

pour l'autre

$$\rho = R.$$

Ainsi la surface Σ' devra avoir, dans ce cas, pour rayon de courbure à l'ombilic, ou le rayon de courbure maximum, ou le rayon de courbure minimum de la surface Σ.

Tout ce que nous venons de dire sur la recherche de la direction des osculations du second ordre, s'applique mot à mot à la recherche des tangentes au point multiple de la courbe intersection de deux surfaces en contact par un point m; ces deux surfaces ayant dès lors un plan tangent commun T, et une normale commune N, en ce même point m.

D'après ce qui précède on peut énoncer les théorèmes généraux suivants :

1er *Théorème*. Deux surfaces Σ et Σ', ayant en un point m même plan tangent T et même normale N, et ayant même direction pour leurs lignes de courbure (ainsi les tangentes aux lignes de courbure se croisant au point m, se superposent deux à deux), se coupent suivant une courbe C. Cette courbe aura deux branches se croisant au point m, et les deux tangentes au point m de la courbe C feront un angle qui

sera divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure, l'angle supplémentaire étant divisé en deux parties égales par la tangente de l'autre ligne de courbure, appartenant soit à la surface Σ, soit à la surface Σ'.

2me *Théorème.* Une surface Σ et un sphère S, ayant en un point m même plan tangent T et même normale N, se coupent suivant une courbe C telle, que l'angle que font entre elles ses deux tangentes pour le point m, est divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure de la surface Σ.

3me *Théorème.* Si l'on construit en un point m le plan tangent T à une surface Σ, et que cette surface soit coupée par ce plan T suivant une courbe C, cette courbe sera telle que l'angle que font entre elles ses deux tangentes pour le point m est divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure de la surface Σ.

Ce dernier théorème n'est qu'un corollaire du second, car le plan tangent T doit être rigoureusement considéré comme une sphère de rayon infini.

De ces théorèmes généraux on déduit, comme corollaires, les théorèmes particuliers suivants :

1er *Théorème.* Étant donnée une surface réglée Σ; le plan tangent T en un point m d'une de ses génératrices droites G, coupe cette surface Σ suivant une courbe C passant par le point m, et l'angle formé par la tangente λ de la courbe C au point m et par la génératrice G, est divisé en deux parties égales par la tangente de l'une des lignes de courbure de la surface Σ.

2me *Théorème.* Les tangentes aux lignes de courbure d'un paraboloïde hyperbolique ou d'un hyperboloïde à une nappe, et se croisant en un point m, divisent en deux parties égales l'angle et son supplément formés par les génératrices droites de systèmes différents qui se croisent en ce même point m.

3me *Théorème.* La tangente λ au point m de la courbe C, intersection d'une surface réglée Σ par son plan tangent T, et la génératrice droite G, forment les génératrices des deux systèmes de l'hyperboloïde ou du paraboloïde osculateur par son sommet, au point m) à

la surface Σ. Ce théorème est un corollaire des deux théorèmes précédents.

4me *Théorème*. Si l'on mène en trois points m, m', m'', de la génératrice droite G d'une surface réglée Σ, les plans tangents T, T′, T″, ces plans couperont Σ suivant les courbes C, C′, C″ et leurs tangentes λ, λ', λ'' seront les directrices de la surface gauche du second ordre ayant un contact du second ordre avec Σ tout le long de la droite G.

En effet, si l'on considère trois génératrices successives et infiniment voisines [*] G, G′, G″ de la surface Σ, et une droite D se mouvant sur ces trois génératrices, on engendrera la surface réglée du second ordre L, osculatrice à la surface Σ tout le long de G, et par-là on démontre qu'il existe toujours et qu'il n'existe qu'une seule surface réglée du second degré ayant une osculation du second ordre tout le long de G avec la surface Σ.

Cela posé, si l'on prend sur G un point m, et que l'on construise l'hyperboloïde H osculateur par son sommet et en ce point m à la surface Σ, les génératrices droites de H se croisant en m, seront G et λ.

Or, pour ce même point m, L et H auront une osculation du second ordre; le plan tangent en m doit donc les couper suivant les mêmes génératrices G et λ; donc λ ne sera qu'une position de la droite D; donc, etc.

Remarquons que la considération des trois génératrices successives G, G′, G″ démontre l'existence de la surface L, mais ne peut servir à la construire; tandis que les trois tangentes λ, λ', λ'' étant à distance finie les unes des autres, peuvent servir à construire graphiquement la surface L.

5me *Théorème*. Si, pour un point m d'une surface du second ordre Σ, on construit les sections circulaires C et C′; si ensuite, au point m, on

[*] On entend par génératrices successives G, G′, G″, celles qui sont telles, qu'en vertu du mode de génération de la surface Σ, on ne peut pas placer entre G et G′ une génératrice qui approche plus près de G que G′, et entre G′ et G″ une génératrice qui approche plus près de G′ que G″.

construit les tangentes λ à C et λ' à C′, l'angle et son supplément, formés par λ et λ', seront divisés en deux parties égales par les tangentes aux lignes de courbure de la surface Σ se croisant au point m.

Ce théorème n'est qu'un corollaire du deuxième théorème général, puisque, par deux cercles C et C′, qui se coupent dans l'espace en deux points, on peut toujours faire passer une surface sphérique.

6me *Théorème*. Étant données dans l'espace deux cercles C et C′ se coupant aux points m et m', on peut toujours les envelopper par deux cônes; désignant par s le sommet du premier cône et par s' le sommet du second cône, les génératrices sm et sm' du premier cône couperont sous l'angle droit les génératrices $s'm$ et $s'm'$ du second cône.

Désignant par O le centre de la sphère passant par les deux cercles C et C′, les cinq points O, m, m', s, s' seront disposés les uns par rapport aux autres de telle sorte que le triangle Oss' sera la base de deux pyramides triangulaires et trirectangles en leurs sommets m et m'.

SUR LA SURFACE DE RÉVOLUTION

DONT LA COURBURE MOYENNE EST CONSTANTE;

PAR CH. DELAUNAY.

Lorsqu'on cherche la surface d'une étendue donnée renfermant un volume maximum, on trouve que l'équation de cette surface doit satisfaire à l'équation aux différences partielles du second ordre

$$(1)\quad r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) + \frac{1}{a}(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0;$$

la question est donc ramenée à intégrer cette équation, ce qu'on n'a pas encore pu faire en général. Dans le cas particulier où $a = \infty$, l'équation (1) devient celle de la surface minimum qui a été intégrée par Monge; mais la forme compliquée de l'intégrale qu'il a donnée, et dont on ne peut tirer aucun parti, fait présumer que si jamais on parvient à intégrer complétement l'équation (1), l'intégrale ne pourra être d'aucune utilité.

Si l'on joint à l'équation (1) la condition que la surface soit de révolution, la difficulté disparaît entièrement, et non-seulement on trouve l'équation générale de la surface, mais on peut aussi donner une définition géométrique très-simple de sa courbe méridienne. C'est ce que je me propose de faire voir dans cette Note.

J'observerai d'abord que l'équation (1) exprime que la somme des courbures principales de la surface est constante et égale à $\frac{1}{a}$. Or on sait

qu'en chaque point d'une surface la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre, est égale à la somme des courbures principales. On peut donc appeler *courbure moyenne* d'une surface en un point la demi-somme des courbures principales en ce point; en sorte que la surface représentée par l'équation (1) est celle dont la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{2a}$, et c'est cette surface que nous nous proposons de trouver dans le cas particulier où elle est de révolution.

Les rayons de courbure principaux en un point d'une surface de révolution sont, comme on sait, le rayon de courbure de la courbe méridienne en ce point, et la portion de la normale à la surface comprise entre ce point et l'axe; il s'ensuit donc que si l'on rapporte la courbe méridienne de la surface cherchée à deux axes coordonnés rectangulaires, dont l'un, l'axe des x, soit l'axe de la surface, cette courbe devra être déterminée par la condition

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} = \frac{1}{a}.$$

en représentant par ρ son rayon de courbure, et par N la portion de sa normale comprise entre la courbe et l'axe des x.

Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, x' et y' les coordonnées du centre du cercle osculateur en ce point, ou, ce qui revient au même, les coordonnées du point correspondant de la développée, et s' la longueur de l'arc de la développée compté à partir d'une origine fixe jusqu'au point (x', y'). On a, d'après les propriétés des développées,

$$\rho = b - s'.$$

b étant une constante qui dépend de l'origine de l'arc s'. D'ailleurs la portion de la tangente à la développée au point (x', y') comprise entre ce point et l'axe des x est égale à $y' \frac{ds}{dx'}$; en y ajoutant ρ, on aura la

valeur de N qui sera

$$N = y' \frac{ds'}{dy'} + b - s' :$$

au moyen de ces valeurs, l'équation (2) devient

$$\frac{1}{b - s'} + \frac{1}{y' \frac{ds'}{dy'} + b - s'} = \frac{1}{a},$$

équation qui va nous servir à déterminer la développée de la courbe cherchée. On en tire d'abord, par l'intégration,

$$y'^2 = \alpha (b - s')(2a - b + s'),$$

α étant la constante arbitraire. En résolvant par rapport à s' et différentiant, on trouve

$$\frac{dy'}{ds'} = - \frac{\alpha \sqrt{a^2 - \frac{y'^2}{\alpha}}}{y'} ;$$

et comme on a

$$\frac{dx'}{ds'} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2},$$

on en déduit

$$\frac{dx'}{ds'} = \frac{\sqrt{y'^2 (1 - \alpha) - a^2 \alpha}}{y'}.$$

A l'inspection de ces valeurs de $\frac{dy'}{ds'}$ et $\frac{dx'}{ds'}$, on voit que la constante α peut recevoir toutes les valeurs positives possibles, et que, dans ce cas, les valeurs de y' doivent être comprises entre les limites $\frac{a\alpha}{\sqrt{1 - \alpha}}$ et $\alpha\sqrt{a}$; mais que si α est négatif, il doit être compris entre o et -1, et, dans ce cas, y' peut recevoir toutes les valeurs plus grandes que $-\frac{a\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}$, ce qui indique que la développée a des branches infinies.

Soit φ l'angle que la tangente à la courbe méridienne cherchée au point (x, y) fait avec l'axe des x; on aura

$$\frac{dx'}{ds'} = \sin\varphi, \quad \frac{dy'}{ds'} = -\cos\varphi, \quad dx' = -dy' \operatorname{tang}\varphi.$$

Il en résulte

$$3 \qquad y' = \frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}},$$

et

$$x' = -\int dy' \operatorname{tang}\varphi = -y' \operatorname{tang}\varphi + \int \frac{y' d\varphi}{\cos^2\varphi}:$$

ou bien, en remplaçant y' par sa valeur,

$$4 \qquad x' = \beta - \frac{a\alpha \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}} + \int_0^\varphi \frac{a\alpha\, d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}}.$$

β étant une nouvelle constante arbitraire.

Ces deux équations (3) et (4) représentent la développée. On pourrait éliminer l'angle φ, et l'on obtiendrait ainsi l'équation de cette courbe; on pourrait aussi exprimer l'intégrale qui entre dans la valeur de x' au moyen de fonctions elliptiques; mais il est préférable, pour ce qui suit, de laisser à ces équations la forme qu'on vient de leur donner.

Ayant déterminé les valeurs des coordonnées x', y' d'un point quelconque de la développée en fonction de la variable auxiliaire φ, il est facile d'en déduire les valeurs des coordonnées x, y, du point correspondant de la courbe cherchée, en fonction de la même variable; en effet, on a

$$y = y' + \rho\frac{dy'}{ds'},$$

$$x = x' + \rho\frac{dx'}{ds'}.$$

D'ailleurs on a aussi, par ce qui précède,

$$\rho = b - s' = a - \sqrt{a^2 - \frac{y'^2}{\alpha}};$$

et si l'on remplace $\frac{dy'}{ds'}$ par $-\cos\varphi$, $\frac{dx'}{ds'}$ par $\sin\varphi$, x' et y' par leurs valeurs tirées des équations (3) et (4), on trouvera les équations suivantes pour représenter la courbe méridienne cherchée :

$$(5)\quad \begin{cases} y = -a\cos\varphi + a\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}, \\ x = \beta + a\sin\varphi - a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi} + \int_0^\varphi \frac{a\alpha\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1+\alpha-\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

La question est donc maintenant complétement résolue sous le point de vue analytique; mais nous pouvons aller plus loin en interprétant géométriquement le résultat auquel nous venons de parvenir.

L'intégrale qui entre dans la valeur de x est de même forme que celle qui se présente dans la recherche de la longueur d'un arc d'ellipse ou d'hyperbole; on est donc naturellement conduit à penser que la courbe représentée par les équations (5) pourrait bien être une espèce de cycloïde engendrée par un point du plan d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roulerait sur une droite. En cherchant à vérifier cette prévision, j'ai reconnu qu'en effet la courbe méridienne trouvée est celle qu'engendrerait le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roulerait sur l'axe des x. Pour le démontrer, il suffira de chercher directement l'équation de cette courbe, et de faire voir qu'elle est identique avec les équations (5).

Concevons donc qu'une hyperbole, par exemple, roule sur l'axe des x, et considérons cette courbe dans une position quelconque. Soient s la longueur de l'arc de la courbe compris entre le sommet et le point de contact avec l'axe des x, r le rayon vecteur qui joint le point de contact au foyer le plus rapproché de l'origine de l'arc s, et φ l'angle que ce rayon vecteur fait avec la normale à la courbe en ce point de contact : on aura pour les coordonnées du foyer

$$x = \beta + s - r\sin\varphi,$$
$$y = r\cos\varphi.$$

Or si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point de contact prises relativement aux axes de l'hyperbole, et si l'on représente par a le demi-axe transversal, et par e l'excentricité de cette courbe, on aura

$$y_1 = \frac{a(e^2-1)}{e} \operatorname{tang} \varphi, \quad x_1 = \frac{a}{e \cos \varphi} \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}, \quad r = ex_1 - a;$$

et par suite

$$r \cos \varphi = -a \cos \varphi + a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$
$$r \sin \varphi = -a \sin \varphi + a \operatorname{tang} \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}.$$

D'un autre côté, on a

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \frac{a(e^2-1)\, d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}},$$

d'où

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{a(e^2-1)\, d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

On aura donc enfin les équations suivantes pour représenter la courbe engendrée par le foyer de l'hyperbole roulant sur l'axe des x :

$$y = -a \cos \varphi - a \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi},$$

$$x = \beta + a \sin \varphi - a \operatorname{tang} \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi} + \int_0^{\varphi} \frac{a(e^2-1)\, d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{e^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Ces équations coïncideront évidemment avec les équations (5) si l'on pose

$$e = \sqrt{1 + \alpha},$$

ce qui pourra toujours se faire lorsque α est positif. Ainsi, dans ce cas, les équations (5) représentent la courbe décrite par le foyer d'une hyperbole roulant sur l'axe des x; a est le demi-axe transversal de cette hyperbole, et $\sqrt{1 + \alpha}$ est son excentricité.

Un calcul semblable ferait voir que, dans le cas où α est négatif, les équations (5) représentent la courbe décrite par le foyer d'une ellipse roulant sur l'axe des x; a est alors le demi grand axe de l'ellipse, et $\sqrt{1 + \alpha}$ son excentricité.

On peut donc conclure de tout ce qui précède, le théorème suivant :

Pour trouver la courbe méridienne de la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{2a}$, *il faut faire rouler sur l'axe de la surface une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse soit égal à* $2a$, *et le foyer décrira la courbe cherchée.*

Si la courbure moyenne de la surface de révolution dont on cherche la courbe méridienne est nulle, on a $2a = \infty$; et alors la courbe méridienne sera engendrée par le foyer d'une parabole roulant sur l'axe de la surface. Mais on sait que cette courbe est une chaînette : on retrouve donc ainsi le théorème déjà connu, que si l'on fait rouler une parabole sur une droite, le foyer de cette parabole décrira une chaînette.

Note de M. Sturm, *à l'occasion de l'article précédent.*

Il s'agit de déterminer la courbe qui, par sa révolution autour d'un axe (l'axe des x), engendre la surface *minimum* qui renferme un volume donné.

Ce volume étant $\pi\int y^2 dx$ et l'aire $2\pi\int y ds$, il faut poser, suivant la méthode connue,

$$\delta.\int (y^2 - 2ay)\,ds = 0,$$

a étant une constante.

En considérant comme fixes les deux extrémités de la courbe, on peut ne faire varier que x, et comme la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

donne

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\,d\delta x,$$

on aura

$$\int \left(y^2 - 2ay\frac{dx}{ds}\right) d\delta x = 0.$$

En intégrant par parties et faisant

$$\delta x = 0$$

aux deux limites, on a

$$\int \delta x . d . \left(y^2 - 2ay \frac{dx}{ds} \right) = 0 ,$$

d'où l'on conclut

$$y^2 + 2ay \frac{dx}{ds} = \text{une constante C.}$$

Chacune des constantes a et C pouvant être positive ou négative, on peut écrire

$$(1) \qquad y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0 ,$$

et de là résulte

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\, dy}{\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}} .$$

C'est l'équation différentielle de la courbe méridienne cherchée; le radical doit être tantôt positif, tantôt négatif; il change de signe quand y devient un maximum ou un minimum.

Si la constante b est nulle, on a un cercle ou l'axe des x.

Si b n'est pas nulle, l'équation différentielle (1) appartient à la courbe décrite par l'un des foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur l'axe des x.

En effet, supposons qu'une ellipse dont les demi-axes sont a et b roule sur l'axe des x. Son foyer F décrit une courbe qui, d'après une propriété générale des épicycloïdes, a pour normale la droite menée du point F au point K où l'ellipse mobile touche l'axe OX.

En désignant par x et y les coordonnées OP, PF, du point F, on a

$$\text{FP} \quad \text{ou} \quad y = \text{KF} . \sin \text{FKP} .$$

Mais FKP est le complement de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente FT à la courbe décrite par le point F. On a donc

$$\sin \text{FKP} = \cos \text{FTP} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 - dy^2}} = \frac{dx}{ds} .$$

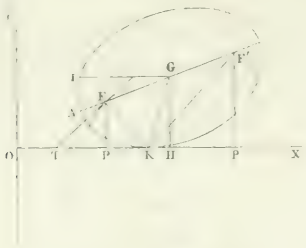
et

$$y = \text{KF} . \frac{dx}{ds} .$$

En désignant par y' la perpendiculaire F'P' abaissée de l'autre foyer sur l'axe et ob-

servant que l'angle F'KP' est égal à FKP, on a aussi

$$y' = \mathrm{KF}' . \frac{dx}{ds}.$$



Ajoutant et remplaçant KF + KF' par $2a$, il vient

$$y + y' = 2a \frac{dx}{ds}.$$

On a d'ailleurs

$$yy' = b^2.$$

Eliminant y', on trouve

$$y^2 - 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0.$$

C'est l'équation différentielle de la courbe décrite par le foyer F.

Quand l'angle FTX devient obtus, $\frac{dx}{ds}$ est négatif et l'équation devient

$$y^2 + 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0.$$

On trouverait la même équation

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0$$

pour la courbe décrite par l'autre foyer F'. Les courbes decrites par les deux foyers ne diffèrent, en effet, que par la position.

Cette équation, si l'on fait $b = a$, n'a pas d'autre solution réelle que

$$y = a,$$

et devient impossible si l'on suppose $b > a$.

En changeant b^2 en $-b^2$ dans ce qui précède, on verra que l'équation

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} - b^2 = 0$$

appartient aux courbes décrites par les foyers d'une hyperbole dont les demi-axes sont a et b et qui roule sur une ligne droite.

Si l'on fait rouler sur OX une parabole AK dont le foyer est F et le sommet A, on aura, d'après les propriétés connues de sa tangente,

$$FA = FP \cos AFP = FP . \cos PFK.$$

L'angle PFK est égal à l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe décrite par le point F ou (x, y); on a donc

$$\cos PFK = \frac{dx}{ds}.$$

Donc, en posant

$$FA = a,$$

la courbe décrite par le foyer a pour équation

$$y \frac{dx}{ds} = a,$$

d'où

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

C'est la chaînette.

On trouve aussi facilement la courbe décrite par le centre G d'une ellipse qui roule sur la droite OX. Soient x et y les coordonnées de ce centre mobile G. En menant le demi-diamètre GI parallèle à OX, conjugué de GK, on a

$$\overline{GK}^2 + \overline{GI}^2 = a^2 + b^2,$$

$$GK . GI . \sin IGK = ab.$$

Mais

$$\sin IGK = \sin GKH = \pm \frac{dx}{ds}.$$

et

$$GK \sin IGK = GH = y.$$

Substituant et éliminant GI, on trouve

$$y^4 + a^2 b^2 \frac{dx^2}{ds^2} = a^2 + b^2 \; y^2 \frac{dx^2}{ds^2};$$

puis, en réduisant,

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}.$$

En remplaçant b^2 par $-b^2$, on aurait l'équation différentielle de la courbe décrite par le centre d'une hyperbole roulant sur l'axe des x.

Si l'hyperbole est équilatère, on a cette équation plus simple

$$y^2 = \pm a^2 \frac{dx}{ds},$$

ou

$$dx = \frac{y^2 ds}{\sqrt{a^4 - y^4}},$$

qui est un cas particulier de celle de la courbe élastique

$$y^2 \pm a^2 \frac{dx}{ds} = C = 0$$

ou

$$dx = \frac{(C - y^2)\, ds}{\sqrt{a^4 - (C - y^2)^2}}.$$

On sait que cette dernière courbe est celle qui, parmi toutes les courbes de longueur donnée sur un plan, engendre, en tournant autour d'un axe tracé dans ce plan, le plus grand ou le plus petit volume, en supposant que la courbe doive se terminer à des points donnés ou à des lignes données. Quand les extrémités doivent se trouver à des distances données de l'axe, on a l'équation plus simple

$$y^2 = \pm a^2 \frac{dx}{ds}.$$

La discussion de ces différentes courbes présente des circonstances curieuses qu'il serait trop long d'indiquer.

On peut, en général, déterminer la courbe qu'il faut faire rouler sur une ligne droite pour qu'un certain point appartenant à cette courbe mobile décrive une autre courbe donnée par son équation différentielle.

Reprenons, par exemple, la courbe représentée par l'équation

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0$$

et supposons qu'elle soit décrite par un point F lié à une courbe mobile AK qui roule sur l'axe des x.

Désignons par r la longueur variable de la droite FK menée du point décrivant F au point K où la courbe inconnue AK touche l'axe des x, et par θ l'angle que cette droite FK fait avec une droite FA fixe par rapport à la courbe AK.

On a

$$\frac{dx}{ds} = \pm \sin \mathrm{FKP} = \pm \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}} = \pm \frac{1}{r\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2}}.$$

et

$$y = r \sin \mathrm{FKP} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2}}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$\frac{1 \pm \frac{2a}{r}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2} + b^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$d\varphi = \frac{b.d.\frac{1}{r}}{\sqrt{-1 \mp \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}};$$

et en intégrant,

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.\cos(\varphi - \alpha)}.$$

équation polaire d'une ellipse dont le point F est un foyer et dont les demi-axes sont a et b.

Ce procédé, appliqué à la courbe élastique, ne donne pas un résultat simple.

SYSTÈME

DE

FONTAINES INTERMITTENTES

ET D'APPAREILS A ÉLEVER L'EAU SANS PIÈCE MOBILE,

MODÈLE FONCTIONNANT :

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

Le principe fondamental a été présenté à l'Académie des Sciences, le 5 novembre 1838.

Les appareils, dont je vais exposer les principes fondamentaux, peuvent être considérés, abstraction faite de leurs applications, comme offrant un moyen d'expliquer quelques phénomènes du mouvement des fontaines naturelles. Ils peuvent être décrits sans figures, leur partie la plus essentielle étant un tuyau d'une forme analogue à celle du signe $\int$, dont les extrémités plongent dans des réservoirs à niveaux de hauteurs différentes; et les autres pouvant d'ailleurs être représentées par divers caractères de l'alphabet. Toutes les pièces sont absolument fixes, c'est-à-dire qu'il n'y a ni piston, ni soupape, ni aucune autre pièce quelconque mobile.

I.

Fontaine intermittente oscillante en forme de $\int$.

Cet appareil est composé d'un simple tuyau en forme de $\int$, c'est-à-dire d'un tuyau vertical, dont le sommet se recourbe en siphon, pour plonger dans un réservoir supérieur alimenté par une source motrice, l'extrémité inférieure débouchant, au moyen d'un développement

d'une forme quelconque, dans un réservoir inférieur ou de décharge. Pour compléter l'appareil, il suffit d'y ajouter un tube à air, recourbé verticalement, et débouchant dans le tube vertical un peu au-dessous du niveau de la source.

Si, par suite d'une *crue* ou par un moyen quelconque, l'appareil est rempli d'eau une première fois, cela suffit pour le mettre en jeu, quand la source ne fournit pas assez d'eau pour alimenter le tuyau d'une manière continue, c'est-à-dire de façon à ce qu'il coule toujours plein. En effet, si l'appareil débite plus d'eau que la source n'en fournit, le siphon qui plonge dans le réservoir supérieur cesse de couler plein. Or, dans l'intérieur de l'appareil, la colonne liquide, sur le sommet de laquelle l'air extérieur s'introduit par le tube supplémentaire dont nous avons parlé, continue à descendre; et, en vertu du mouvement acquis, atteint une profondeur, qui dépend de la force vive qu'elle a reçue avant l'interruption de sa communication avec le réservoir alimenté par la source. Cette force vive dépendant elle-même de l'abondance de la source, il y a évidemment des conditions pour lesquelles l'abaissement de la colonne au-dessous du niveau du réservoir inférieur est assez grand pour que, en vertu du principe de l'oscillation, elle remonte ensuite jusqu'au sommet du système, et se courbe dans le siphon qui établit la communication avec la source; de sorte qu'à l'époque où le mouvement ascensionnel est éteint, ce siphon étant de nouveau *amorcé*, l'appareil recommence son jeu indéfiniment. Le mouvement du liquide est, comme on le voit, variable; il part de o et augmente graduellement pour s'éteindre de même à chaque période. Quand la colonne remonte, elle se divise dans le siphon qui va établir la communication dans la source motrice et dans le tube à air; de sorte que, si celui-ci est conique, il jette périodiquement de l'eau au-dessus du niveau de la source. On peut, d'ailleurs, embrancher sur le tuyau vertical un autre tuyau d'ascension *partant de plus bas*, afin que la quantité de force vive employée à produire l'ascension soit plus considérable.

Bien que cet appareil ne paraisse pas susceptible d'être employé utilement *sous cette forme*, comme il s'agit d'un principe essentiel pour ce qui va suivre, nous allons entrer de suite dans quelques détails, afin qu'il se grave mieux dans la mémoire.

Ordinairement on prescrit de faire tous les tuyaux cylindriques, afin

que le pourtour soit le moindre possible relativement à la masse liquide. Ici nous avons à observer une loi toute contraire pour la partie supérieure de l'appareil, parce qu'il est bon que l'air extérieur pénetre le plus facilement possible dans cette partie à l'époque où le siphon, qui plonge dans la source, cesse de couler plein. On voit d'après cela que le tube latéral supplémentaire, destiné à cette introduction de l'air, doit entourer extérieurement le tuyau, et être formé de deux surfaces coniques. Par la même raison, le siphon, qui plonge dans la source, peut être formé de deux autres surfaces coniques, mais repliées en forme de *champignon;* ce qui offrira l'avantage de diviser au besoin ce siphon en plusieurs autres, et par conséquent de multiplier le rapport de la somme des pourtours à la somme des sections des tubes qui plongent dans le réservoir de la source. Pour les cas où cette subdivision ne serait pas indispensable, on remarquera que cette sorte de siphon annulaire ne se trouvant plus formé que de deux pièces, dont on peut, si l'on veut, varier le degré d'écartement, est au fond un véritable *robinet*, c'est-à-dire qu'il offre l'avantage de pouvoir varier son ouverture; et, de plus, il ne donne lieu à aucun *étranglement brusque*.

Ce qui vient d'être dit pourrait faire regarder l'appareil comme trop délicat pour entrer dans les combinaisons de la nature inorganique; aussi, en indiquant les dispositions utiles à l'économie du travail, je m'empresse d'ajouter que je l'ai fait fonctionner, abandonné à lui-même, pendant un grand nombre de périodes, *avec des formes tout-à-fait grossières*. Mais alors il est indispensable que la partie horizontale, ou le développement de la partie inférieure, ait une longueur assez grande relativement à la chute motrice; or c'est précisément ce qui se présente dans les canaux souterrains naturels. Cette longueur est nécessitée par les coudes, ou par les causes quelconques de résistances *locales* indépendantes du frottement proprement dit. On conçoit, en effet, que si la colonne oscillante est plus longue, la durée des oscillations est plus grande, et que, le chemin parcouru à *chaque oscillation* par la résistance étant déterminé, cela diminue la moyenne des vitesses dont cette résistance est fonction. La longueur de la colonne oscillante diminue, par cette raison, le travail résistant pour *chaque oscillation*, pourvu que toutefois cette longueur ne soit pas excessive, parce que alors cela donnerait trop de prépondérance au genre de résis-

tances particulières aux vitesses extrêmement petites. Je ne m'étendrai pas davantage sur ces considérations, détaillées dans mon précédent Mémoire, page 89 de ce volume, où l'on peut voir comment, pour les grandes vitesses, la longueur des surfaces frottantes du tuyau d'une colonne liquide oscillante est compensée par la diminution de vitesses provenant de cette même longueur pour chaque oscillation, quand on fait abstraction des coudes ou autres résistances *locales*.

L'appareil que j'ai exécuté était tout simplement composé d'un tuyau en forme de $\int$, dont la partie inférieure avait un développement horizontal d'une vingtaine de mètres et débouchait par son autre extrémité dans un réservoir; la hauteur verticale de tout l'appareil, en y comprenant le réservoir, dont la hauteur était au moins les deux tiers de celle-ci, était de $\frac{2}{3}$ de mètre environ. Ces tubes avaient $0^m,05$ de diamètre intérieur. Le tube latéral supplémentaire destiné à la circulation de l'air intérieur offrait l'inconvénient d'être cylindrique; il avait d'ailleurs le même diamètre que les autres. Le siphon qui plongeait dans la source était quadrangulaire et son diamètre vertical était graduellement rétréci de moitié au haut de son coude. Sa paroi inférieure formait un arc de cercle d'un rayon d'une fois et demie environ son côté. Ces diverses dimensions sont d'ailleurs d'autant plus indifférentes que l'appareil était, comme je l'ai dit, très-grossier et devra être exécuté d'après les considérations susdites. Je donne une idée de ces dimensions, seulement parce que si elles étaient à peu près moitié moindres, du moins quant au diamètre des tubes, il serait très difficile et peut-être impossible de faire marcher l'appareil.

Pour le mettre en jeu, après avoir rempli les deux réservoirs, et par conséquent tout le tuyau horizontal, je versais un sceau d'eau dans un entonnoir adapté provisoirement sur le tube à air. Le cours d'eau qui alimentait extérieurement le bassin supérieur n'étant pas tout-à-fait assez abondant, j'y suppléais ensuite en versant de l'eau extérieurement dans ce bassin, et la fontaine intermittente marchait d'ailleurs abandonnée à elle-même *sans aucune pièce quelconque mobile*. Les deux remarques les plus essentielles à faire sur son jeu consistent en ce que :

1°. Quand le niveau de l'eau dans le bassin supérieur descendait à l'extrémité de la bouche du siphon *alimentaire* de l'appareil, ce siphon continuait encore à couler pendant quelques instants, parce qu'il sou-

levait, en vertu de la viscosité de l'eau, une petite colonne de ce liquide au-dessus du niveau général du bassin supérieur. Or, à l'instant où la colonne se divisait à l'entrée du siphon, par l'effort de l'air extérieur, la petite masse d'eau soulevée retombant pour se mettre de niveau avec son réservoir, formait un creux, en vertu du mouvement acquis, comme l'aurait fait une sorte de vague. Cet effet est très-avantageux pour l'appareil, parce qu'il facilite l'entrée de l'air extérieur dans le siphon, à la suite de la colonne qui sort par l'autre extrémité, en vertu de son mouvement acquis.

2°. Malgré cet effet, la bouche du siphon n'étant pas longtemps complétement libre, et devant se recouvrir bientôt, à cause de l'eau qui vient toujours de la source, lorsque le niveau de la colonne intérieure était descendu jusqu'à l'origine du tube latéral destiné à introduire l'air extérieur sur son sommet, on entendait très-distinctement le bruit causé par la rentrée brusque de cet air. On voit, d'après cela, combien il est important de faciliter cette rentrée par la plus grande section possible, au moyen d'un tuyau annulaire *enveloppant* le pourtour du sommet du tuyau principal; tandis que, dans l'essai dont je viens de rendre compte, aux premiers instants où l'air entrait de ce côté, il ne le pouvait que par le segment le plus étroit d'une courbe à double courbure.

Le cours d'eau qui alimentait extérieurement le bassin supérieur n'étant pas tout à fait assez abondant, j'y suppléais, comme je l'ai dit, en y versant de l'eau moi-même, de sorte qu'il y avait réellement de l'intermittence dans l'alimentation du réservoir supérieur; mais il est évident que la difficulté consistait à faire fonctionner l'appareil *sans pièce mobile*, surtout si l'on a égard à l'extrême imperfection de ce modèle, imperfection utile d'ailleurs pour établir qu'un appareil de ce genre peut se présenter dans la nature inorganique.

On prescrit ordinairement d'évaser les extrémités des tuyaux dans les machines hydrauliques; mais il n'est pas prouvé que, dans cet appareil, il soit utile de le faire pour la bouche du siphon supérieur, à cause des conditions à remplir pour la rentrée de l'air à l'époque où ce siphon se vide. On remarquera d'ailleurs que la perte de force vive, provenant des phénomènes de la contraction de la veine liquide à cet orifice, peut avoir moins d'importance que dans plusieurs autres de mes appareils; parce que l'écoulement ne se fait en ce point que pen-

dant une *fraction* de la durée totale de chaque oscillation, soit dans un sens, soit dans l'autre. Quant au maximum de cette perte, nous avons déjà expliqué pourquoi elle peut ne pas avoir beaucoup d'importance si le tuyau horizontal est suffisamment long.

J'ai vérifié par l'expérience qu'une colonne liquide oscillante amorce facilement, par son mouvement de bas en haut, un siphon de 11 centimètres de diamètre; et comme il est bon de disposer un siphon annulaire, dont le diamètre vertical dans le coude soit tout au plus moitié du diamètre du tuyau vertical, on pourra probablement exécuter des appareils de ce genre en leur donnant d'assez grandes sections. Il était un peu plus difficile d'amorcer le siphon quand l'extrémité, opposée à celle d'où vient la colonne ascendante, plongeait dans l'eau, comme dans l'appareil dont il s'agit; mais, avec le même gros tuyau dont nous venons de parler, on surmontait facilement cette difficulté, en se ménageant un petit tube latéral à air, comme dans cet appareil. On n'a guère alors qu'un volume d'air, égal à celui du siphon supérieur, à chasser au travers de la couche d'eau qui recouvre l'extrémité opposée. Pendant cette époque, l'eau monte dans le tube latéral destiné, comme nous l'avons dit, soit à la libre sortie, soit à la libre rentrée de l'air aux instants convenables. On peut remarquer que l'eau montera plus ou moins haut dans ce tube latéral, selon que l'air du siphon sera plus ou moins difficile à chasser au travers de la couche d'eau qui s'y oppose.

On voit que si l'on voulait élever de l'eau au moyen de cet appareil *considéré sous cette forme*, la résistance de cette colonne d'air pourrait être considérée comme une des causes d'un versement au-dessus du niveau de la source motrice. Mais, en général, ce genre d'appareil serait évidemment défectueux sous cette forme à cause des chemins parcourus par les résistances passives; si la somme des longueurs de ces chemins était très-grande par rapport à celui de l'eau, qui fournirait l'effet utile en versant à une hauteur, petite comparativement à la chute motrice. Nous allons décrire une autre forme, qui offre elle-même un véritable principe d'appareils, comme nous le verrons plus loin.

Sous celle que nous venons de décrire, il est évident que le système fonctionnera de lui même indéfiniment, malgré des variations de débit dans la source, 1° si cette source est toujours assez abondante pour

recouvrir périodiquement, d'une manière convenable, l'extrémité du siphon supérieur; 2° si le travail moteur surpasse toujours un peu le travail résistant. Il est clair, en effet, que si la force ascensionnelle est assez puissante pour amorcer le siphon alimentaire, l'appareil se retrouvera toujours périodiquement dans un état analogue à celui où il était au commencement de son jeu.

II.

Appareil élévatoire sans pièces mobiles.

Considérations préliminaires.

Cet appareil ne diffère, quant à la forme, du précédent que par l'addition d'un tuyau d'ascension sur la partie horizontale ou le développement de la partie inférieure. Pour concevoir comment il se produit, dans ce tuyau d'ascension, une oscillation puissante par rapport aux autres oscillations sur lesquelles reposera le jeu du système, il faut admettre un principe fort simple sur les oscillations de l'eau dans un siphon renversé ordinaire, de diamètre constant, en faisant pour un moment abstraction du présent appareil.

Abstraction faite des résistances passives, la hauteur à laquelle une colonne liquide, abandonnée à elle-même, après avoir été soulevée une première fois dans une des branches d'un pareil siphon, doit remonter dans la branche opposée, dépend évidemment de la hauteur à laquelle l'eau avait été soulevée dans la première. Mais la hauteur qui sera obtenue, dans la seconde branche, ne changerait pas si, par un moyen quelconque, on avait supprimé dans celle-ci, avant la naissance du mouvement, une portion plus ou moins grande de la colonne d'eau verticale. Ainsi, en faisant toujours abstraction des résistances passives, lorsque, pour augmenter la hauteur qui sera obtenue dans la seconde branche, on introduit, d'une manière quelconque, une certaine quantité d'eau sur la première branche, la hauteur qui sera obtenue dans la seconde ne dépend pas de la profondeur où l'eau était dans celle-ci à l'instant de la naissance du mouvement ascensionnel : je veux

dire qu'elle n'en dépend point de la même manière qu'elle le ferait si l'autre branche était en communication *non interrompue* avec un réservoir; car, en toute rigueur, la longueur de la colonne peut avoir quelque influence sur la hauteur dont il s'agit, par suite des phénomènes du choc des fluides ou par d'autres raisons secondaires provenant des résistances passives.

Ce principe évident trouvera son application en ce que, pour obtenir une hauteur donnée, au moyen d'une colonne liquide oscillante, il ne sera plus indispensable, comme dans l'appareil précédent, que le sommet de cette colonne parte d'une *profondeur dont la limite soit déterminée*, abstraction faite des résistances passives; pourvu que l'on ait un moyen de soustraire périodiquement, sans perte de force vive trop sensible, la quantité d'eau périodiquement introduite dans l'appareil pour entretenir son jeu. Or on verra plus loin que cela se peut, par la raison même que ce qui vient d'être dit permet de *distribuer*, à volonté, la course d'une colonne liquide au-dessus et au-dessous d'un tuyau de décharge.

Quand une colonne liquide oscille dans un système quelconque de tuyaux, les pressions qu'elle exerce sur un point donné varient nécessairement avec le mouvement de cette colonne. Les personnes qui n'auraient pas lu mes précédents Mémoires pourront se faire une idée de ces effets au moyen des considérations suivantes, que je crois d'ailleurs nouvelles, en ce qu'elles présentent de l'analogie entre les phénomènes dont il s'agit et une loi du choc des corps élastiques, bien qu'on fasse abstraction de tout *choc* dans ce qui va suivre.

Concevez deux tuyaux, ouverts à toutes leurs extrémités, et disposés l'un sur l'autre comme une sorte de grand T *renversé*. Je suppose qu'il n'y ait pas encore d'eau dans le tuyau vertical, et que le tuyau horizontal en soit rempli. Si l'on conçoit que la première partie de la colonne d'eau horizontale soit en mouvement, l'autre, au-delà du tuyau vertical, étant encore en repos, la portion en mouvement élèvera dans le tuyau vertical de l'eau, qui pressera latéralement la portion en repos, et lui imprimera graduellement de la vitesse. Quand la vitesse sera devenue à peu près aussi grande en aval qu'en amont du tube vertical, la colonne verticale redescendra; et il est intéressant de voir en quel état sera le système à l'époque où toute l'eau sera rentrée dans

le tuyau horizontal (que l'on supposera indéfiniment prolongé et relevé à ses extrémités), abstraction faite des résistances passives.

Or il est à remarquer que le travail employé à refouler l'eau dans le tuyau vertical, devant ensuite se restituer jusqu'à un certain point, pendant que l'eau redescendra vers le tuyau horizontal, *produit un effet parfaitement analogue à celui des ressorts dans le choc des corps élastiques.* C'est-à-dire que (si toutefois les vitesses ne sont pas trop grandes par rapport à la longueur du système), quand toute l'eau sera rentrée dans le tuyau horizontal, la portion de la colonne comprise dans ce dernier tuyau avant la branche verticale, pourra ou revenir sur ses pas, ou être réduite au repos, ou continuer à se mouvoir, avec une vitesse, bien entendu moindre qu'avant l'ascension, selon le rapport qui existera entre les longueurs des deux parties de la colonne horizontale. Or il y a dans cette distribution de vitesses quelque chose d'analogue à ce qui se présente dans le choc des corps élastiques, selon le rapport du corps choquant au corps choqué.

Ces considérations, évidentes par elles-mêmes, ne sont pas indispensables pour ce qui va suivre; mais on a pensé qu'elles pouvaient être utiles et offrir quelque intérêt, en présentant de l'analogie entre des phénomènes d'une nature tout à fait différente.

Description du jeu de l'appareil.

Le système se compose, comme nous avons dit, de l'appareil en forme de *f*, auquel on a seulement ajouté un tuyau d'ascension, sur un point intermédiaire de la portion horizontale de la partie inférieure suffisamment développée. De sorte qu'il prend une forme analogue à celle d'une petite *m renversée,* la branche du milieu étant la plus longue, et la dernière se recourbant en siphon dans le réservoir de la source; cela est d'ailleurs figuré au moyen de la *liaison,* qui la termine comme la plupart des caractères de l'alphabet. Tout l'appareil est rempli d'eau une première fois, par un moyen quelconque, à l'exception d'une partie du tuyau vertical du milieu. Il descend de l'eau de la source comme dans le premier système en forme de *f*; mais elle vient se poser, du moins en partie, au bas du tuyau du milieu, ou plutôt elle repousse

de l'eau dans cette partie. A l'époque où, en vertu de cette descente, la vitesse est graduellement devenue assez grande, le siphon, qui plonge dans le réservoir supérieur, cesse d'être amorcé, comme nous l'avons expliqué pour le premier système. A cette époque l'eau est en mouvement dans toutes les parties de l'appareil : elle baisse dans le tuyau qui vient de la source, monte dans le tuyau vertical du milieu, et finit par verser au sommet de celui-ci, en fournissant l'effet utile. La colonne redescend ensuite dans ce dernier tuyau, et se divise en deux parties, dont l'une passe à l'extrémité inférieure de l'appareil, pour se rendre au réservoir de décharge; et l'autre remonte vers la source, pour amorcer le siphon qui y plonge, de manière à ce que le jeu recommence périodiquement, en recevant de la force motrice comme dans le premier appareil en forme de f.

Pour bien concevoir l'ensemble et la raison de ce qu'on vient de décrire, il faut suivre attentivement le jeu de la colonne de décharge, en la considérant comme influencée par les pressions variables de la colonne du tuyau du milieu. Nous allons d'abord faire abstraction des résistances passives.

Ce qu'il y a de plus essentiel à remarquer, c'est que la colonne, repliée dans le tuyau vertical d'ascension et dans celui qui vient de la source, *oscille par ses deux extrémités*, pendant qu'elle n'est pas en communication avec le réservoir supérieur. Nous avons vu dans les préliminaires de ce second chapitre, que cette condition permet de distribuer, comme on veut, la course de la surface de la colonne oscillante dans une des branches d'un siphon, quant aux chemins périodiquement parcourus au-dessus et au dessous d'un niveau d'une hauteur donnée. Il résulte de là que l'on peut se servir de l'oscillation de la colonne dans le tube vertical du milieu pour faire écouler périodiquement de l'eau motrice au niveau de la décharge On fait naître du mouvement dans le tuyau de décharge pendant l'époque où cette colonne monte au-dessus de ce niveau ; et l'on réduit l'eau de ce tube au repos, pendant l'époque où cette même colonne descend au-dessous du même niveau, parce que la pression résistante devient alors prépondérante. Les phénomènes de la distribution des pressions, que l'on pourrait nommer *positives* et *négatives*, autour d'un niveau d'une hauteur donnée, deviennent plus compliqués, dans l'appareil dont il

s'agit que dans un simple siphon, par la raison même qu'il en résulte un écoulement latéral d'une partie de la colonne oscillante, mais on pourra toujours y avoir égard, du moins par le tâtonnement.

Tout ce qui vient d'être dit suppose que les colonnes liquides ont une longueur développée assez grande par rapport à la chute motrice. Nous avons d'ailleurs expliqué que, même dans le premier appareil, ayant tout simplement une forme analogue à celle d'une $\int$, cette condition était indispensable dans ces systèmes.

Voici maintenant de quelle façon la force motrice agit, et abandonne périodiquement l'appareil. Nous avons vu comment l'eau motrice descend de la source, et comment, l'appareil étant en jeu, la vitesse naît ou augmente graduellement dans la colonne de décharge, pendant le temps que l'eau du tuyau d'ascension se trouve au-dessus du niveau de la décharge, soit pendant l'ascension, soit pendant le commencement de la descente. Nous savons aussi que la vitesse diminue au contraire dans la même colonne, pendant que la surface de celle du tuyau du milieu est au-dessous du niveau de la décharge, soit à la fin de la descente, soit au commencement de l'ascension. Or si, par la disposition de l'appareil, on règle convenablement, sur la colonne de décharge, les pressions motrices et les résistances les unes par rapport aux autres dans une même période, cette colonne sera périodiquement réduite au repos. On peut d'ailleurs faire déboucher le tuyau de décharge, par une extrémité évasée, un peu au-dessus du niveau où il va verser de l'eau qui ne doit revenir sur ses pas que le moins possible. Pour bien concevoir de quelle manière l'eau, qui passe au niveau de la décharge, en se mêlant à une colonne réduite périodiquement au repos, comme nous venons d'expliquer que cela peut se faire, *traverse l'appareil en exécutant un travail*, nous allons faire pour un moment abstraction de cet appareil, et considérer le mouvement oscillatoire d'une colonne liquide dans un siphon renversé ordinaire à branches, de diamètre constant, mais inégales en hauteur.

Si l'on versait périodiquement du liquide dans un pareil siphon par la branche la plus courte, chaque fois qu'une colonne liquide oscillante arrive à la hauteur du sommet de cette branche (précisément comme dans la première moitié de l'appareil dont il s'agit), il est clair qu'il pourrait bien ensuite sortir de l'eau par le haut de

la seconde branche pendant quelques oscillations, mais que l'eau redescendrait de moins en moins bas dans cette même branche. En effet, l'eau d'une source ne peut pas s'élever au-dessus de son niveau, si en définitive une partie de cette eau ne reste pas à un niveau moins élevé après sa descente. Il résulte de là que le tuyau d'ascension de l'appareil dont nous nous occupons aurait une tendance à se remplir de plus en plus, et à finir par faire cesser le jeu, si l'on n'avait pas un moyen d'évacuer la quantité dont il tend ainsi à se remplir. C'est donc en cela que consiste le travail de l'eau motrice, qui descend de la source au niveau de décharge. Il vide une portion du système, où l'eau de la source descend en emmagasinant de la force vive, comme dans une sorte de bélier hydraulique, mais sans choc brusque.

Jusqu'à présent nous avons fait abstraction des résistances passives dans l'appareil objet de ce second chapitre; mais il peut se présenter de légères causes d'irrégularité dans le jeu du siphon qui aspire périodiquement l'eau de la source. Or il est facile de prévoir que les irrégularités, qui en résulteront dans toutes les autres parties du système, ne doivent pas arrêter le jeu, et donneront lieu à des compensations; pourvu qu'elles ne dépassent pas certaines limites, comme dans d'autres appareils dont le jeu est connu.

Mais, abstraction faite de toute compensation, cet appareil fournissant à chaque période au sommet du tuyau d'ascension une quantité d'eau assez notable par rapport à la capacité de ce tuyau, il est clair qu'il pourrait fonctionner au moyen d'une source motrice, un peu plus ou un peu moins abondante. En effet, si l'oscillation ascendante est un peu plus ou un peu moins puissante, il est facile de démontrer, comme on va le voir, que son action latérale sur le tuyau de décharge sera un peu plus ou un peu moins forte; de sorte que, si le débit de la source motrice varie, il suffira que la course de la colonne dans le tuyau d'ascension varie, aussi selon certaines lois, pour que la colonne de décharge soit réduite périodiquement au repos, selon la meilleure condition du système. Or cette colonne de décharge étant d'une longueur sensiblement constante (puisqu'on peut faire abstraction de la force vive de l'eau qui sort de l'appareil par une extrémité évasée), pour qu'elle débite plus ou moins d'eau, il suffit que la course de l'oscillation dans le tuyau d'ascension soit réglée en conséquence.

Maintenant supposons que le débit de la source diminue, ou qu'il y ait quelque irrégularité dans les résistances passives de l'appareil; s'il n'y a rien de trop brusque, le mouvement général reprendra de lui-même le *régime* qui lui convient. Si la source fournit un peu moins d'eau, cela diminuera la puissance de l'oscillation, et par suite les vitesses périodiques dans le tuyau de décharge, à cause des pressions latérales.

Pour bien concevoir cette influence de la puissance de l'oscillation, dans le tuyau d'ascension, sur les pressions latérales, il ne faut pas perdre de vue que les *hauteurs dues* aux vitesses variables de cette oscillation seront toujours très-petites par rapport à la chute motrice, à cause de l'inertie des longues colonnes liquides oscillantes. De plus, par la raison même que ces colonnes sont très-longues, le versement supérieur ne diminuera cette inertie que d'une très-petite fraction; ainsi il faudra d'autant plus de pressions résistantes pour anéantir le mouvement ascensionnel, que ce mouvement sera plus puissant. Les vitesses ne sont point ici, comme on pourrait le penser d'après le théorème de Bernoulli, une cause de diminution très-notable dans les pressions latérales, puisque les *hauteurs dues* à ces vitesses sont très-petites relativement aux hauteurs variables des colonnes liquides dont le poids est la cause de ces pressions. Or les vitesses étant fonction des pressions qui les engendrent, si le débit de la source diminue d'une manière assez insensible, il peut en définitive varier de quantités sensibles, sans que le jeu soit interrompu. On pourra, du reste, régler l'eau motrice *au moyen d'un second réservoir supérieur*, si les compensations ne sont pas assez rigoureuses. Quant aux irrégularités indépendantes du débit de la source, il y a dans tout le système une *tendance* au rétablissement du *régime* convenable.

La principale cause d'irrégularités et peut-être, dans certains cas, de pertes de forces vives, provient du mode d'introduction de l'eau dans l'appareil. Mais ce mode, essentiel dans le premier appareil en forme de *f*, destiné principalement à fournir une explication de quelques phénomènes du mouvement des fontaines naturelles, n'est plus le point fondamental dans celui qui nous occupe; c'est-à-dire que si l'eau motrice était périodiquement versée sur le haut du tuyau, qui remonte vers la source, au moyen d'une soupape ou pièce mobile quelconque,

ce second appareil n'en subsisterait pas moins comme *principe*. Il est même probable que son effet serait plus avantageux, si l'eau motrice lui était fournie par un moyen analogue à celui que j'ai exécuté pour un modèle fonctionnant d'un de mes appareils, décrit dans le tome IV de ce Journal, page 243. Mais il est inutile d'entrer ici dans des détails étrangers aux *principes*, seul objet de cette Note.

III.

Jet d'eau oscillant, qui fournit un effet et une force motrice.

Nous avons vu, au commencement du second chapitre, que l'on peut disposer un siphon renversé de manière à distribuer à volonté la course d'une colonne liquide oscillante *au-dessus et au-dessous* d'un point donné. Nous avons vu aussi que l'on peut entretenir les oscillations en faisant passer périodiquement de la force motrice *au travers* du système, et cela en ajoutant un simple tuyau de décharge à un siphon renversé. Or il est facile de démontrer que, sans ce tuyau de décharge, et au moyen d'un orifice pratiqué sur la paroi de ce siphon, on peut aussi faire passer *utilement* de la force motrice *au travers* de l'appareil. En effet, abstraction faite des pertes de force vive, ou en ne les supposant pas trop grandes, il suffit, pour que le jeu de l'appareil soit entretenu, que le centre de gravité d'une certaine masse d'eau passe du niveau de la source à un niveau inférieur, sans perte trop sensible de force vive. Or, d'après des expériences dont j'ai parlé dans le tome III de ce Journal, page 209, on sait que si la colonne horizontale d'un siphon renversé est assez longue, par rapport aux courses des oscillations, et qu'un jet d'eau vertical sorte, par un orifice en mince paroi, de la colonne horizontale (son diamètre n'étant pas trop grand relativement à ceux des tuyaux), auprès d'une des branches verticales, ce jet s'élève dans l'air libre à des hauteurs variables analogues à celles que la colonne oscillante atteint dans le siphon; il s'élève d'ailleurs avec elle bien au-dessus du niveau de la source, quand une des branches du siphon débouche dans le réservoir de cette source. Or, dans le système

dont nous nous occupons, une des branches étant en communication, pendant un certain temps, avec la source motrice, l'eau s'élèvera dans l'autre branche au-dessus de cette source, et il en sera de même d'un jet d'eau, oscillant dans l'air libre, comme celui dont nous venons de parler. Supposons maintenant que ce jet d'eau, étant incliné sous un certain angle, passe sur un système de réservoirs, disposés les uns au-dessus des autres comme les marches d'un escalier. L'eau élevée par ce jet oscillant se versera latéralement dans ces réservoirs, à ses diverses hauteurs variables; et l'on conçoit même que s'ils étaient à d'assez petites hauteurs les uns au-dessus des autres, le centre de gravité de la quantité totale de l'eau, fournie par le jet oscillant, pourrait ne redescendre que d'une très-petite quantité par l'effet de ce versement latéral. Ainsi, en définitive, soit pendant l'ascension, soit pendant la descente, on aura, à chaque période, *une masse d'eau sortie de la source et qui aura traversé l'appareil en descendant à un niveau inférieur*, sans beaucoup de perte de force vive. La hauteur dont le centre de gravité de cette masse d'eau descend se règle, comme nous l'avons dit, au moyen de la disposition de la seconde branche du siphon, dans lequel une colonne liquide oscille par ses deux extrémités. Il est donc évident que cette descente cause un *travail*, qui entretient le jeu de l'appareil d'une manière analogue à ce qui a été dit dans le second chapitre.

On peut maintenant se représenter facilement l'effet de ce jet d'eau oscillant. Il distribue son eau au-dessus et au-dessous du niveau de la source, par une disposition convenable du siphon; et il est à remarquer que, si la branche auprès de laquelle il oscille, est indéfiniment prolongée, un même orifice débitera par un même jet *l'effet et la force motrice*.

L'appareil *s'amorcera* comme celui qui est décrit dans le premier chapitre; et, pour que son jeu se continue indéfiniment, il suffira que la colonne, dans son mouvement rétrograde, ait la puissance nécessaire pour *amorcer* périodiquement le siphon qui plonge dans la source. Si d'ailleurs l'orifice du jet d'eau, oscillant dans l'air libre, est au-dessous de la limite inférieure de la course de l'oscillation, dans la branche la plus éloignée de la source, l'appareil reprendra de lui-même le jeu convenable au régime, quand l'abondance de la source variera dans certaines limites avec une lenteur suffisante, parce que le

mouvement rétrograde de la colonne et le débit du jet d'eau varient avec la puissance ascensionnelle de cette colonne dans le siphon. On pourra d'ailleurs *régler la source au moyen d'un second réservoir supérieur*, si cela est nécessaire.

IV.

Appareil pour faire des épuisements sans pièce mobile.

Sans rien changer de bien essentiel, en apparence, à la forme de l'appareil décrit dans le second chapitre, on peut le rendre propre à faire des épuisements. Il suffit d'élargir la branche du milieu et de réduire sa hauteur à celle où l'eau épuisée doit se verser. Dans cette disposition, l'eau motrice et l'eau épuisée *sortiront en entier par une même branche*. L'appareil du second chapitre avait une forme analogue à celle d'une sorte de petite *m renversée* dont la branche du milieu était la plus longue; et sous cette nouvelle forme il aura toujours celle d'une petite *m* renversée, mais dont les trois branches iront graduellement en diminuant de hauteur, la dernière débouchant dans l'eau à épuiser. Il est entendu que, dans l'un et l'autre appareil, le tuyau, qui versera l'eau élevée, sortira un peu au-dessus du niveau où elle doit monter, afin qu'elle ne puisse point revenir sur ses pas.

Voici maintenant de quelle façon l'appareil fonctionnera. On sait que, dans un siphon à branches de diamètres inégaux, une colonne liquide en oscillation remonte plus haut dans la branche la plus étroite que dans l'autre. On conçoit donc qu'il suffit de verser de l'eau périodiquement sur l'extrémité de la colonne qui descend de la source, comme dans les appareils précédents, pour que la colonne remonte périodiquement vers cette source, en *s'allongeant pour aller à la rencontre de la force motrice*. Or cette même colonne oscillant par ses deux extrémités, nous avons vu que cela suffit pour la mettre convenablement en communication avec un tuyau de décharge où le liquide sera périodiquement réduit au repos, à peu près comme s'il y avait une soupape. Mais, dans le présent appareil, l'eau viendra du dehors au-dedans de la troisième branche, ce qui est précisément le contraire de l'effet de cette même branche dans l'appareil du second cha-

pitre. Il suffit pour cela que l'eau ait été dirigée une première fois dans le sens voulu; parce que, pendant l'époque où l'eau baisse dans la branche du milieu au-dessous du niveau de l'eau à épuiser, celle-ci descend tout naturellement dans cette même branche du milieu; tandis que, pendant l'époque où dans cette même branche l'eau se trouve au-dessus du niveau dont il s'agit, la vitesse de l'eau diminue dans la troisième branche, d'une manière parfaitement analogue à celle que nous avons décrite dans le second chapitre.

Dans l'un et l'autre cas, soit que l'eau de la troisième branche se dirige à l'intérieur, soit qu'elle se dirige à l'extérieur de l'appareil, si tout est bien réglé, elle ne reviendra point sensiblement sur ses pas et ne sera réduite au repos que pendant des instants très-courts. Si donc on a besoin d'amener l'eau d'un point éloigné au lieu où se trouve la branche du milieu, *il ne faudra pas mettre sur le compte de l'appareil le travail en frottement dépensé pour amener l'eau par la troisième branche*. Mais il n'en est pas, il est vrai, ainsi du travail en frottement dans la partie de l'appareil qui vient de la source, parce qu'en supprimant les pièces mobiles, il ne m'a pas encore été possible d'éviter le mouvement de retour vers la source, comme je le fais pour l'appareil décrit tome III de ce Journal, page 437, que j'ai exécuté depuis, et dont cette circonstance servira d'ailleurs à faire ressortir l'utilité [*].

Les frottements paraissent devoir être, en général, la cause la plus importante de perte de force vive, quand les tuyaux sont très-longs par rapport à la chute motrice et aux hauteurs que l'eau élevée doit atteindre; puisque d'ailleurs dans la pratique on pourra, si l'on trouve que cela soit plus économique, employer un autre mode d'introduction de l'eau motrice dans l'appareil. On ajoutera seulement ici, pour ne pas répéter ce qui a été dit autre part, que dans le cas où l'appareil servira aux épuisements, bien que sa forme matérielle présente autant

* On peut remarquer que, dans l'appareil objet du second chapitre de la présente Note, il y a un instant où l'eau coule dans le même sens et doit avoir à peu près la même vitesse dans le tuyau d'arrivée que dans le tuyau de décharge, c'est-à-dire dans tout le développement horizontal de l'appareil. Cet instant est celui où le versement cesse au sommet du tuyau d'ascension.

de coudes, il y en aura cependant à considérer un de moins que dans le cas où il était élévatoire, parce que l'eau motrice ne passait dans la troisième branche qu'en se *pliant* par dessus un *éperon*. Quant à la manière de calculer les résistances passives dans les colonnes liquides oscillantes, je renvoie à mes précédents Mémoires, les calculs n'offrant ici aucun intérêt particulier.

Il n'est pas aussi facile pour les appareils, objet du second et du quatrième chapitre, que pour les deux autres, d'établir qu'ils pourront être *amorcés* au moyen d'une simple *crue d'eau*, sans employer, *seulement il est vrai une première fois*, un système de pièces mobiles. Cependant cela ne paraît pas impossible, et leur propriété de pouvoir ensuite fonctionner, au moyen de pièces *absolument fixes*, m'a fait penser qu'ils devaient être classés avec les deux autres, parmi les *principes* qui pourront servir à l'explication du mouvement des fontaines naturelles.

CONCLUSIONS.

Si le premier des appareils décrits dans cette Note ne semble pas devoir présenter *sous cette forme* d'applications bien utiles à l'industrie; du moins, à cause de sa simplicité, il paraît être au nombre des combinaisons que l'on doit trouver dans la nature inorganique.

Quoiqu'il renferme le véritable principe des trois autres systèmes, en ce sens qu'ils ne pourraient pas fonctionner sans lui, *au moyen de pièces absolument fixes*, et qu'il était impossible de ne pas trouver ces autres appareils après l'invention du premier; cependant ils offrent un principe bien distinct, reposant sur les propriétés du jeu des *deux extrémités* de la colonne qui part de la source motrice.

On peut même supposer que l'eau motrice leur est fournie périodiquement par des moyens tout-à-fait différents. Il faut seulement que l'appareil ne soit pas toujours en communication avec le réservoir de la source; il y était au contraire sans interruption dans l'appareil décrit tome III de ce Journal, page 437.

Si le jet d'eau oscillant sous la forme décrite dans le troisième chapitre de la présente Note, n'est pas destiné à rendre des services à l'in

dustrie, il offre, du moins, un exemple des effets variés, que l'on peut s'attendre à rencontrer dans les grottes naturelles, et dont la cause est peut-être bien plus simple qu'on n'aurait été porté à le croire.

Quant aux appareils décrits dans le second et le troisième chapitre, ils paraissent susceptibles de rendre des services à l'industrie, bien que je les regarde comme devant être, en général, sous ce rapport, inférieurs aux autres appareils de mon invention. En présentant ce premier essai sur la solution du problème des fontaines naturelles, je dois d'ailleurs prévenir que le sujet est susceptible de plusieurs autres solutions assez variées. On ajoutera seulement ici, pour en donner quelque idée, qu'aux extrémités d'une colonne liquide horizontale d'une certaine longueur, les pressions motrices qui la font osciller, ne se font pas sentir avec la même force qu'aux points où elles s'exercent immédiatement. J'ai établi ce fait par l'expérience. Or cette diminution de force étant graduelle le long de la colonne, on conçoit quelle variété d'effets peut en résulter sur un *réseau de conduites et de jets d'eau oscillants*. Ainsi, une *cause quelconque* faisant osciller une simple colonne liquide, il peut en résulter, à de très-grandes distances, une série de phénomènes très-compliqués, que l'on indique ici comme principe de mouvement, et sur lesquels on reviendra dans un travail d'un autre genre.

Nota. Il eût été très-diffficile d'expliquer sans figures tous les détails des appareils précédents, et les modifications dont ils sont susceptibles. On a cru devoir se borner à en exposer les principes et ne les développer que dans des recueils spéciaux.

PROBLÈME

DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR E. CATALAN.

Un cône du second degré à base elliptique étant donné, on le coupe par une sphère concentrique, et l'on demande de calculer la portion de la surface sphérique interceptée.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

l'équation du cône; et soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

l'équation de la sphère.

En représentant par A l'aire cherchée, on a

$$A = \int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Les limites de l'intégration seront données par la projection, sur le plan des xy, de la courbe d'intersection des deux surfaces. Or cette projection a pour équation

$$x^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) + y^2\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) = 1,$$

ou

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1.$$

Maintenant je pose

$$\alpha x = \rho\cos\omega, \quad \beta y = \rho\sin\omega. \quad \text{d'où} \quad dx\,dy = \frac{1}{\alpha\beta}\rho\,d\rho\,d\omega;$$

il en résultera

$$A = \frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\rho\,d\rho\,d\omega}{\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}.$$

Intégrant par rapport à ρ, l'on a

$$\int\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}+C,$$

et

$$\int_0^1 = \frac{1}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}\right].$$

Donc

$$A = \frac{4}{\alpha\beta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\right].$$

Pour obtenir la première intégrale, je prends tang $\omega = u$, d'où

$$\cos^2\omega = \frac{1}{1+u^2}, \quad \sin^2\omega = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad d\omega = \frac{du}{1+u^2};$$

ce qui donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}} = \int_0^{\infty}\frac{du}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{u^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2}\pi\alpha\beta.$$

La seconde intégrale ne peut s'obtenir sous forme finie que dans le cas où $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque le cône est de révolution.

On a, pour ce cas particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{2} \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Donc, en mettant pour α sa valeur,

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{a}\right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}\right);$$

ce que l'on peut trouver par des considérations géométriques.

Dans le cas général, je pose $\tang \omega = p \tang \theta$, d'où

$$\sin^2 \omega = \frac{p^2 \tang^2 \theta}{1 + p^2 \tang^2 \theta}, \quad \cos^2 \omega = \frac{1}{1 + p^2 \tang^2 \theta}, \quad d\omega = \frac{p}{1 + p^2 \tang^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

et

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p^2 \tang^2 \theta}{\beta^2}}{1 + p^2 \tang^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) + p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \tang^2 \theta}{1 + p^2 \tang^2 \theta}}.$$

Ce radical se simplifiera si l'on prend

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Alors la formule à intégrer devient

$$\frac{p\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}}{1+p^2\tang^2\theta}\times\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1+p^2\tang^2\theta}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{p^2\tang^2\theta}{\beta^2}}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sqrt{1+p^2\tang^2\theta}}$$

$$=p\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\,\frac{d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}+\frac{p^2\sin^2\theta}{\beta^2}}\times\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+p^2\sin^2\theta}}$$

$$=p\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\,\frac{d\theta}{\frac{1}{\alpha^2}-\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{\beta^2}\right)\sin^2\theta}\times\frac{1}{\sqrt{1-(1-p^2)\sin^2\theta}}.$$

On a

$$p=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\alpha^2}}{1-\frac{1}{\beta^2}}}=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2-1}{\beta^2-1}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2}}}=\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}:$$

comme on peut supposer $a>b$, p sera <1. Donc

$$1-p^2=\frac{a^2-b^2}{1+a^2}$$

sera une quantité positive <1, que l'on peut représenter par e^2.

Enfin, la quantité

$$1-\frac{\alpha^2p^2}{\beta^2}=1-\frac{\alpha^2-1}{\beta^2-1}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

est pareillement positive, et moindre que l'unité : appelons-la n. Nous aurons, à la place de la seconde intégrale,

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{1+b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a^2}\sqrt{1+b^2}\,\Pi(e,n).$$

Cette fonction elliptique complète de troisième espèce peut s'exprimer par des fonctions de première et de seconde. Pour opérer la transformation, j'emploie une formule donnée par Legendre (*Exer-*

cices, tome I, page 141) :

$$\frac{c'^2 \sin\delta' \cos\delta'}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\delta'}}\left[\Pi_1(n,c) - F_1(c)\right] = \frac{\pi}{2} + F_1(c)F(c',\delta') - E_1(c)F(c',\delta') - F_1(c)E(c',\delta').$$

Dans cette formule

$$c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1+b^2}{1-a^2},$$

et

$$\sin^2\delta' = \frac{1-n}{c'^2} = \frac{b^2}{a^2}\frac{1-a^2}{1+b^2}.$$

Elle devient donc

$$\Pi_1(n,c) = F_1(c) + \frac{a\sqrt{1-a^2}}{b}\left(\frac{\pi}{2} + \text{etc.}\right).$$

Notre intégrale est par suite

$$\frac{1}{a}\sqrt{1+b^2}\,F_1(c) + \frac{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1+b^2}}{ab}\left[\frac{\pi}{2} + F_1(c)F(c',\delta') - \text{etc.}\right].$$

Réunissant les deux résultats, on a

$$A = 2\pi - \frac{4b}{a\sqrt{1-a^2}}F_1(c) - 4\left[\frac{\pi}{2} + F_1(c)F(c',\delta') - E_1(c)F(c',\delta') - F_1(c)E(c',\delta')\right]$$

$$= 4\left[E_1(c)F(c',\delta') + F_1(c)E(c',\delta') - F_1(c)F(c',\delta') - \frac{b}{a\sqrt{1-a^2}}F_1(c)\right].$$

Remarque. On sait que la courbe d'intersection d'un cône à base elliptique et d'une sphère concentrique, est une *ellipse sphérique*. Il résulte donc des calculs précédents, que l'aire de l'ellipse sphérique s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce jointe à une quantité algébrique.

Le lecteur pourra consulter, relativement aux propriétés de l'ellipse sphérique, plusieurs Mémoires de *Fuss*, de M. *Chasles*, de M. *Gudermann*, etc.

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PROPOSITIONS GÉNÉRALES DE GÉOMÉTRIE

ET

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR J. LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 23 août 1841 [*].)

I.

1. En considérant la série complète des tangentes que l'on peut mener à une courbe géométrique parallèlement à une droite donnée, on trouve que le centre des moyennes distances des points de contact de ces tangentes avec la courbe est indépendant de la direction commune des tangentes, c'est-à-dire reste fixe lorsqu'on incline à la fois toutes les tangentes sans altérer leur parallélisme. De même si l'on considère la série complète des plans tangents que l'on peut mener à une surface géométrique parallèlement à un plan donné, on trouve que le centre des moyennes distances des points de contact de ces plans tangents avec la surface est indépendant de la direction commune des plans tangents. Il faut dans cet énoncé tenir compte de tous les points de contact réels ou imaginaires, situés à une distance finie ou infinie; il faut aussi compter deux fois, trois fois, ... tout point qui résulte de la réunion de deux, de trois, ... points en un seul. C'est ce que nous

[*] *Comptes rendus*, tome XIII, page 412. — Les principaux résultats avaient été communiqués antérieurement à la Société philomatique (séance du 10 juillet 1841).

ferons toujours dans ce Mémoire, et ce dont nous avertissons une fois pour toutes. Il y a peut-être quelques inconvénients, mais il y a aussi dans certaines théories, et en particulier dans celle qui nous occupe, de grands avantages à introduire ainsi dans la Géométrie le langage de l'algèbre. En cela du reste nous suivons l'exemple de M. Poncelet et de la plupart des auteurs auxquels la Géométrie est redevable des immenses progrès qu'elle a faits dans ces derniers temps.

2. Grace aux méthodes élégantes et fécondes dont s'est enrichie la science, les deux théorèmes précédents se présentent d'eux-mêmes comme une déduction naturelle, nécessaire, presque immédiate, d'un théorème de Newton sur les diamètres des courbes. Après les avoir donnés dans son *Aperçu historique*, M. Chasles observe que leur existence entraîne celle de deux théorèmes d'algèbre dont la démonstration directe lui semble offrir des difficultés. En effet, si l'on représente par $M(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe géométrique, les points de contact de cette courbe avec une tangente parallèle à la droite dont l'équation est $y = ax$, devront satisfaire à la fois aux deux équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0;$$

donc si la proposition de géométrie plane énoncée plus haut est exacte, il faut qu'en éliminant y on trouve pour coefficient du second terme de l'équation finale en x, mise sous la forme ordinaire

$$x^t + Gx^{t-1} + \text{etc.} = 0,$$

une quantité G indépendante de a. En vertu du théorème relatif aux surfaces, il faut de même qu'en éliminant y et z entre les trois équations algébriques

$$M(x, y, z) = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dM}{dy} + b\frac{dM}{dz} = 0,$$

le coefficient du second terme dans l'équation finale en x soit indépendant de a et b.

3. C'est pour obtenir une démonstration directe de ces théorèmes relatifs à l'élimination, que j'ai d'abord entrepris mes recherches. Cette démonstration, je dois l'avouer, a été loin d'offrir les difficultés que semblait redouter M. Chasles : elle repose en effet sur des principes très-simples et très-connus, mais dont on n'avait peut-être pas assez développé jusqu'ici les conséquences. En poursuivant mon travail, j'ai reconnu ensuite que les mêmes principes conduisent au beau théorème de M. Jacobi (*), exprimé par l'équation

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0,$$

ou le signe $\sum$ se rapporte à tous les couples (α, β) de racines des deux équations algébriques simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et où $C(\alpha, \beta)$ désigne la fonction entière suivante

$$\frac{df}{d\alpha}\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\frac{dF}{d\alpha},$$

qui dépend de f et F, tandis que φ_1 est une fonction entière quelconque de degré inférieur à $C(\alpha, \beta)$.

Ce théorème est compris comme cas particulier dans une équation remarquable, à laquelle je me suis trouvé conduit par mon analyse. Soient $f(x, y)$, $F(x, y)$, $\varphi(x, y)$ trois fonctions algébriques entières de x, y, et $\varphi_1(x, y)$ une quatrième fonction entière, quelconque aussi, mais de degré inférieur à φ : posons

$$\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dx} = C(x, y),$$

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = A(x, y);$$

(*) Voyez le Mémoire intitulé : *Theoremata nova algebraica*. Journal de M. Crelle, tome XIV, page 281. *Voir* aussi le tome XV, page 306.

nous aurons

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu)\, C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\, A(\lambda, \mu)},$$

le signe sommatoire s'étendant dans le premier membre à tous les couples (α, β) de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et dans le second membre à tous les couples (λ, μ) de racines des équations simultanées $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Le théorème de M. Jacobi répond au cas de $\varphi(x, y) = C(x, y)$.

4. On arrive à des résultats semblables pour $(s+1)$ polynomes $f(x, y, \ldots, z)$, $F(x, y \ldots z) \ldots$, $\varphi(x, y \ldots z)$, $\psi(x, y \ldots z)$ contenant s lettres $x, y, \ldots, z$. Désignons par $D(x, y, \ldots, z)$ la *résultante* [*] du système

$$\begin{array}{l}
\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \ldots\ldots, \frac{df}{dz}, \\
\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \ldots\ldots, \frac{dF}{dz}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \ldots\ldots, \frac{d\varphi}{dz},
\end{array}$$

dans lequel la fonction ψ n'entre pas; le mot *résultante* ayant ici la signification que Laplace lui a donnée quand il a démontré la règle générale par laquelle on résout les équations du premier degré. Soit $A(x, y, \ldots, z)$ ce que devient l'expression $D(x, y, \ldots, z)$ lorsqu'on y remplace f par $-\psi$, en sorte que $A(x, y, \ldots, z)$ dépendra de $F, \ldots, \varphi, \psi$, mais non plus de f. Soit enfin $\psi_1(x, y, \ldots, z)$ un nouveau polynome quelconque de degré inférieur à ψ. On aura

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = \sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{f(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)},$$

---

[*] Au lieu du mot *résultante*, les géomètres emploient souvent le mot *déterminant*.

le signe $\sum$ s'étendant dans le premier membre à tous les couples $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ de racines des équations simultanées

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \ldots, \quad \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0,$$

et dans le second membre à tous les couples $(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ de racines des équations simultanées

$$F(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \ldots, \varphi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \quad \psi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0.$$

Si l'on prend en particulier

$$\psi(x, y, \ldots, z) = D(x, y, \ldots, z),$$

il vient

$$\sum \frac{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = 0.$$

3. Toute cette théorie, comme on le verra dans mon Mémoire, repose sur une observation bien simple, savoir, que la somme des racines de l'équation finale, régulièrement obtenue, pour une inconnue déterminée, par l'élimination des autres inconnues effectuée d'après la méthode des fonctions symétriques, dans un système quelconque d'équations algébriques, doit rester la même quelle que soit celle de ces équations qu'il nous plaît de choisir pour y substituer les racines que les autres fournissent. L'équation finale en x résultant de l'élimination de $y, \ldots z$ entre les équations algébriques $M = 0$, $N = 0, \ldots, P = 0$, $Q = 0$, peut en effet être obtenue soit en faisant le produit des valeurs que prend le polynome Q lorsqu'on y substitue les racines $(y, \ldots z)$ fournies par les équations $M = 0$, $N = 0, \ldots$, $P = 0$, soit en faisant le produit des valeurs que prend le polynome M lorsqu'on y substitue les racines $(y, \ldots z)$ fournies par les équations $N = 0, \ldots P = 0$, $Q = 0$. De là, pour la somme $\sum x$ des racines, deux expressions qui ne peuvent manquer d'être égales et se présentent pourtant sous des formes différentes. C'est en égalant entre elles ces deux expressions que j'ai trouvé, sans le chercher, le théorème

énoncé plus haut. Au lieu de la somme des racines, on pourrait employer la somme de leurs valeurs inverses, et l'on arriverait aux mêmes résultats.

On peut aussi démontrer nos formules en s'appuyant sur la loi si connue de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Mais cette nouvelle méthode mérite d'être l'objet d'un article spécial [*].

Le théorème de M. Jacobi et les théorèmes analogues auxquels je suis parvenu, conduisent à un grand nombre de propositions géométriques, dont la plupart me paraissent nouvelles. On en trouvera quelques exemples dans mon Mémoire.

II.

6. Soient $M(x, y)=0$, $N(x, y)=0$, ou plus simplement $M=0$, $N=0$, deux équations algébriques à deux inconnues x et y. Supposons que la première équation soit de degré m, et que, résolue par rapport à y, elle fournisse les m racines $y_1, y_2, \ldots, y_m$; puis faisons

$$N(x, y_1)\, N(x, y_2) \ldots N(x, y_m) = X:$$

X sera une fonction entière et symétrique par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et par suite pourra s'exprimer en fonction entière de x. L'équation finale en x résultant de l'élimination de y entre les deux équations proposées sera d'ailleurs $X = 0$. Pour obtenir cette équation finale, il suffit donc de former le produit X.

Indépendamment de toute théorie d'élimination, on pourrait se proposer de chercher, comme nous allons le faire, le produit X des quantités $N(x, y_1), \ldots, N(x, y_m)$ produites par la substitution dans la fonction entière quelconque $N(x, y)$, des racines $y_1, \ldots, y_m$ d'une équation donnée $M(x, y) = 0$ où y est l'inconnue. Ce problème,

---

[*] On peut dès à présent en prendre une idée nette en lisant la Note insérée dans les *Comptes rendus*, tome XIII, page 467.

qui est utile aussi dans la pratique, comprend comme cas particulier celui de l'élimination; mais à cause de sa généralité même il est plus facile à résoudre. Ayant alors en effet une seule équation entre x et y, on voit que x sera une variable indépendante, et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ des fonctions de cette variable : or la présence d'une variable indépendante dans les calculs multipliera évidemment les moyens de transformation.

7. Dans le polynome M, qui est par hypothèse de degré m par rapport à x et y, groupons ensemble les termes homogènes de l'ordre m, puis ceux de l'ordre $(m-1)$, puis ceux de l'ordre $(m-2)$, et ainsi de suite : opérons de même sur le polynome $N(x, y)$ que nous supposerons de degré n : ces deux polynomes prendront la forme

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$N = x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} F_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots$$

ou bien, en désignant par u le rapport de y à x,

$$M = x^m f(u) + x^{m-1} f_1(u) + x^{m-2} f_2(u) + \ldots,$$
$$N = x^n F(u) + x^{n-1} F_1(u) + x^{n-2} F_2(u) + \ldots;$$

la fonction $f(u)$ est au plus de degré m, $f_1(u)$ au plus de degré $(m-1)$, $f_2(u)$ au plus de degré $(m-2), \ldots$ par rapport à u; et $F(u)$, $F_1(u), \ldots$ sont de même respectivement de degrés n, $n-1, \ldots$ au plus.

Dans le cas général $f(u)$ est en effet un polynome quelconque de degré m. Attachons-nous d'abord à ce cas général, sauf à revenir plus tard, en peu de mots, sur les cas particuliers, et admettons désormais que l'équation $f(z) = 0$ est satisfaite par m racines distinctes $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

8. Cela posé, si l'on considère à part l'équation

$$M(x, y) = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

c'est-à-dire

$$x^m f(u) + x^{m-1} f_1(u) + \ldots = 0,$$

on voit qu'en supposant la valeur de x très-grande, le rapport u de y à x fourni par cette équation converge indéfiniment vers la limite α fournie par l'équation $f(\alpha) = 0$, les m racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ correspondant aux m valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de y ou $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de u.

Ainsi en général une racine u de l'équation $M = 0$, peut être mise sous la forme $u = \alpha + \varepsilon$, ε ou plutôt son module devenant infiniment petit quand la valeur de x devient infiniment grande.

Mais la valeur approchée de εx est très-facile à trouver, et par la théorie des asymptotes on sait qu'elle se réduit à la constante α' déterminée pour chaque valeur de α par l'équation du premier degré

$$f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0,$$

où $f'(\alpha)$ désigne, conformément à la notation de Lagrange, la dérivée $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$. En d'autres termes, la valeur de u peut être mise sous la forme

$$u = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\eta}{x},$$

η ou plutôt son module devenant infiniment petit quand la valeur de x devient infiniment grande.

Ajoutons que la valeur approchée de η est à son tour de la forme $\frac{\alpha''}{x^2}$, α'' étant déterminée par l'équation

$$f'(\alpha)\alpha'' + \frac{f''(\alpha)}{2}\alpha'^2 + f_1'(\alpha)\alpha' + f_2(\alpha) = 0,$$

et qu'on peut mettre u sous la forme

$$u = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \frac{\zeta}{x^3}.$$

ζ ou son module devenant infiniment petit lorsque la valeur de x devient infiniment grande. On pourrait évidemment continuer ce calcul

à l'aide duquel la valeur de u (et par suite la valeur de y) se trouve développée en série ordonnée suivant les puissances descendantes de x. Cette série résulte très-simplement de la théorie des asymptotes, théorie que l'on ne présente pas toujours, mais qu'il serait facile de présenter sous une forme complétement rigoureuse, si l'on voulait entrer ici dans des détails auxquels les géometres exercés suppléeront sans peine. Les asymptotes rectilignes ($y = \alpha x + \alpha'$) de la courbe représentée par l'équation $M(x, y) = 0$ sont, comme on voit, généralement en nombre m, à cause des m racines de l'équation $f(\alpha) = 0$; mais chacune d'elles est réelle ou imaginaire, suivant que la racine α correspondante est elle-même réelle ou imaginaire.

9. Au lieu de développer y en série ordonnée suivant les puissances descendantes de x, on pourrait développer y en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable. On groupera entre eux et on représentera par $f(y)$ les termes de M qui sont indépendants de x; on groupera de même et on représentera par $x f_1(y)$, $x^2 f_2(y)$,... les termes du premier degré, du second degré,... en x, en sorte que l'équation $M = 0$ devienne

$$f(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + \ldots = 0;$$

$f(y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, ... sont respectivement des polynomes de degrés m, $m - 1$, $m - 2$,..., au plus : nous admettrons (c'est le cas général que $f(y)$ est en effet un polynome de degré m et que de plus les racines de l'équation $f(\gamma) = 0$ sont toutes inégales. Cela posé, pour des valeurs très-petites de x, on pourra développer y sous la forme

$$y = \gamma + \gamma' x + \gamma'' x^2 + \ldots\ldots,$$

γ, γ', γ'', ... étant déterminés par les équations

$$f(\gamma) = 0, \quad f'(\gamma)\gamma' + f_1(\gamma) = 0,$$
$$f'(\gamma)\gamma'' + \frac{f''(\gamma)}{2}\gamma'^2 + f_1'(\gamma)\gamma' + f_2(\gamma) = 0, \text{ etc.}$$

Ici, comme dans le n° **8**, je supprime la démonstration qui se présente

d'elle-même. Au besoin, du reste, on trouvera dans les ouvrages de M. Cauchy tous les détails nécessaires pour le développement des racines des équations en séries ordonnées suivant les puissances d'un paramètre contenu dans l'équation.

Les segments compris entre l'origine des coordonnées et les points où la courbe représentée par l'équation $M = 0$ est coupée par la transversale que l'on a prise pour axe des y, sont fournis par l'équation $f(\gamma) = 0$; les tangentes à la courbe menées par les m points dont il s'agit sont représentées par l'équation $y = \gamma + \gamma' x$; γ'' dépend de la courbure de la courbe en ces mêmes points. Les équations en $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ ont la même forme que les équations en $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ du n° précédent; d'où résulte une liaison intime, et du reste bien connue des géomètres, entre la théorie des asymptotes et celle des tangentes aux divers points d'une courbe situés sur une même transversale.

10. La valeur de u ou de $\frac{y}{x}$, savoir $u = \alpha + \varepsilon$, que nous avons trouvée n° **8**, suffit pour déterminer le premier terme du polynome X et le degré de l'équation finale. En effet, si l'on divise par x^{mn} les deux membres de l'équation $X = N(x, y_1) N(x, y_2) \ldots N(x, y_m)$, il viendra

$$\frac{X}{x^{mn}} = \frac{N(x, y_1)}{x^n} \frac{N(x, y_2)}{x^n} \ldots \frac{N(x, y_m)}{x^n};$$

on voit aisément ce que devient pour $x = \infty$ le rapport

$$\frac{N(x, y)}{x^n}$$

où y représente une quelconque des racines $y_1, y_2, \ldots, y_m$; en effet, si dans

$$N(x, y) = x^n F(u) + x^{n-1} F_1(u) + \ldots$$

on met pour u sa valeur $\alpha + \varepsilon$, on a

$$\frac{N(x, y)}{x^n} = F(\alpha + \varepsilon) + \frac{1}{x} F_1(\alpha + \varepsilon) + \ldots,$$

quantité qui pour $x = \infty$ se réduit à $F(\alpha)$. Donc pour $x = \infty$, il vient aussi

$$\frac{X}{x^{mn}} = F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m).$$

En d'autres termes le polynome X est en général de degré mn et a pour premier terme

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)\,x^{mn}.$$

On retombe ainsi sur le théorème connu relatif au degré de l'équation finale [*].

On peut trouver de la même manière le second terme ou plutôt tous les termes du polynome X. Il suffit, en effet, de remplacer dans le produit

$$N(x, y_1)\,N(x, y_2)\ldots N(x, y_m),$$

les racines $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par leurs valeurs déduites de la formule générale

$$\frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad u = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \ldots$$

du n° **8**, puis d'effectuer le développement de ce produit suivant les puissances descendantes de x. Dans ce but, on observera qu'en général

$$N(x, y) \quad \text{ou} \quad x^n F(u) + x^{n-1} F_1(u) + \ldots$$

[*] Pour former le premier terme de X, il suffit, comme on voit, de connaître le premier terme de chacune des séries qui représentent le développement des racines y ordonné suivant les puissances descendantes de x. Ce premier terme est en général de la forme αx, mais dans certains cas particuliers, il devient proportionnel à une puissance de x dont l'exposant est différent de l'unité et se calcule par la règle du parallélogramme de Newton. Les cas particuliers dont il s'agit ont été examinés par M. Minding, dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (t. XXII, p. 178). Le Mémoire de Minding, dont je n'ai eu connaissance que depuis peu de jours, est écrit en allemand; nous en donnerons la traduction dans un prochain cahier.

se transforme dans la somme suivante

$$x^n F\left(\alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) + x^{n-1} F_1\left(\alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) + \ldots$$

et que de plus on a

$$F\left(\alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) = F(\alpha) + \frac{F'(\alpha)}{1}\left(\frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) + \ldots,$$

. . . . . .

Par un calcul très-facile, on trouvera ainsi que le coefficient de x^{mn-1} dans X est

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m) \sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

le signe $\sum$ étant relatif à toutes les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont une quelconque est ici représentée par α. On verra semblablement que le coefficient de x^{mn-2} est égal au produit de $F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m)$ par

$$\sum \frac{F'(\alpha)\alpha'' + \frac{F''(\alpha)}{2}\alpha'^2 + F_1'(\alpha)\alpha' + F_2(\alpha)}{F(\alpha)} + \sum \frac{\varpi(\alpha_i)\varpi(\alpha_j)}{F(\alpha_i)F(\alpha_j)}.$$

où l'on a fait $F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha) = \varpi(\alpha)$; l'indice i dans la dernière somme prend toutes les valeurs depuis 2 jusqu'à m, et l'indice j toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $(i - 1)$. — Et ainsi de suite.

11. En résumé, X est un polynome de degré mn en général. Le premier terme de ce polynome est

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m) x^{mn},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant les m racines de $f(\alpha) = 0$. Les fonctions $f_1, F_1, f_2, F_2, \ldots$ n'influent pas sur ce terme : il dépend de f et F seulement.

Le rapport du coefficient du second terme à celui du premier terme est

$$\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

le signe $\sum$ se rapportant à toutes les racines α de l'équation $f(\alpha) = 0$, auxquelles répondent respectivement les valeurs de α' déterminées par

$$f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0.$$

Ce rapport ne dépend pas des fonctions f_2, F_2, f_3, F_3, ..., mais bien de f, F, f_1, F_1.

Le rapport du coefficient du troisième terme à celui du premier terme dépend des six fonctions f, F, f_1, F_1, f_2, F_2 : il est exprimé par

$$\sum \frac{F'(\alpha)\alpha'' + \frac{F''(\alpha)}{2}\alpha'^2 + F_1'(\alpha)\alpha' + F_2(\alpha)}{F(\alpha)} + \sum \frac{\varpi(\alpha_i)\varpi(\alpha_j)}{F(\alpha_i)F(\alpha_j)},$$

où $\varpi(\alpha) = F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)$ et où l'on doit mettre pour α'' sa valeur fournie par l'équation

$$f'(\alpha)\alpha'' + \frac{f''(\alpha)}{2}\alpha'^2 + f_1(\alpha)\alpha' + f_2(\alpha) = 0;$$

dans la derniere somme i varie de 2 à m, j de 1 à $(i-1)$. — Et ainsi de suite.

12. Mais au lieu d'employer le développement de y suivant les puissances descendantes de x, et de déterminer d'abord le terme de X du degré le plus élevé, puis celui du degré $mn-1$, etc., on pourrait se servir du développement de y suivant les puissances ascendantes de x donné n° **9**, et déterminer d'abord le terme indépendant de x, puis celui qui contient x au premier degré, etc. Après avoir mis les deux polynomes M, N sous la forme

$$M = f(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + \ldots,$$
$$N = F(y) + x F_1(y) + x^2 F_2(y) + \ldots,$$

on trouvera, par un calcul tout semblable à celui du n° **10** :

1°. Que le terme de X indépendant de x est

$$F(y_1)F(y_2)\ldots F(y_m),$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ étant les racines de $f(\gamma) = 0$; ce terme ne dépend que des fonctions f, F:

2°. Que le coefficient du terme où x entre à la première puissance est

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)\sum\frac{F'(\gamma)\gamma' + F_1(\gamma)}{F(\gamma)},$$

le signe $\sum$ se rapportant aux racines γ de l'équation $f(\gamma) = 0$ et aux valeurs correspondantes de γ' fournies par $f'(\gamma)\gamma' + f_1(\gamma) = 0$: ce terme dépend des quatre fonctions f, F, f_1, F_1. — Et ainsi de suite.

15. La somme $\sum x$ des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$ de l'équation finale $X = 0$, la somme inverse $\sum\frac{1}{x}$, le produit $x_1\,x_2\ldots x_{mn}$, et en général toutes les fonctions symétriques et rationnelles des quantités x_1, $x_2, \ldots, x_{mn}$, sont faciles à calculer d'après ce qui précède. On a d'abord

$$\sum x = -\sum\frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

c'est-à-dire

$$\sum x = \sum\frac{F'(\alpha)f_1(\alpha)}{F(\alpha)f'(\alpha)} - \sum\frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

en mettant pour α' sa valeur tirée de l'équation $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$.

On a de même

$$\sum\frac{1}{x} = -\sum\frac{F'(\gamma)\gamma' + F_1(\gamma)}{F(\gamma)},$$

c'est-à-dire

$$\sum\frac{1}{x} = \sum\frac{F'(\gamma)f_1(\gamma)}{F(\gamma)f'(\gamma)} - \sum\frac{F_1(\gamma)}{F(\gamma)}.$$

Enfin on a

$$x_1\,x_2\ldots x_{mn} = (-1)^{mn}\cdot\frac{F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)}{F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_n)}.$$

Nous reviendrons plus tard sur ces diverses formules qui, par des changements convenables dans les axes coordonnés des x et des y, peuvent se déduire les unes des autres. Si nous n'avons pas transcrit celles qui fournissent les sommes des carrés, des cubes.... des racines x ou de leurs valeurs inverses, c'est qu'elles sont assez compliquées. Contentons-nous d'observer en général que la somme des puissances i s'exprime à l'aide des seules fonctions f, F,..., f_i, F_i dont l'indice ne surpasse pas i, et ne dépend nullement des fonctions suivantes f_{i+1}, F_{i+1},...; remarque qui a son analogue pour les sommes de puissances négatives, et qui s'étend du reste au cas général d'un nombre quelconque d'équations et d'inconnues.

14. Considérons maintenant trois équations algébriques des degrés respectifs m, n, p, entre trois inconnues x, y, z. Soient

$$M(x, y, z) = 0, \quad N(x, y, z) = 0, \quad P(x, y, z) = 0,$$

ces trois équations. Concevons qu'on ait résolu les deux premières par rapport à y et z, et représentons par (y_1, z_1), (y_2, z_2), ... les mn couples de racines ainsi obtenues en fonction de x, puis posons

$$X = P(x, y_1, z_1) P(x, y_2, z_2) \ldots;$$

X sera une fonction symétrique des quantités (x_1, y_1), (x_2, y_2), etc., et pourra par conséquent s'exprimer en fonction entière de x. D'ailleurs $X = 0$ sera l'équation finale en x, résultant de l'élimination des deux inconnues y et z. Pour former cette équation finale, il suffit donc de chercher le polynome X. Or on obtiendra ce polynome soit en développant les racines y, z, et la fonction $P(x, y, z)$, suivant les puissances descendantes de la quantité x supposée très-grande, soit en opérant au contraire un développement suivant les puissances ascendantes de la quantité x supposée très-petite.

15. Dans le premier cas il faudra grouper entre eux les termes de

même dimension, et écrire les trois polynomes M, N, P sous la forme

$$x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$$x^n F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$$x^p \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{p-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots.$$

Ensuite on déterminera les coefficients successifs $\alpha, \alpha', \ldots, \beta, \beta', \ldots$ dans les séries

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots, \quad \frac{z}{x} = \beta + \frac{\beta'}{x} + \ldots,$$

fournies par la résolution des équations

$$M = 0, \quad N = 0,$$

à l'aide des formules suivantes

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \ldots,$$

$$F(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + F_1 = 0, \ldots;$$

et l'on trouvera :

1°. Que le premier terme de X est

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1)\varphi(\alpha_2, \beta_2)\ldots\varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})x^{mnp};$$

2°. Que le coefficient du second terme de X est égal au produit du coefficient du premier terme par

$$\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi}.$$

Et ainsi de suite. A peine avons-nous besoin d'avertir que $f, f_1, \ldots$ sont

en général des fonctions de degrés m, $m-1, \ldots$ respectivement, et que F, $F_1, \ldots$ sont de degrés n, $n-1, \ldots$ par rapport à α, β : $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_{mn}, \beta_{mn})$ sont les mn couples formés par les racines (α, β) des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$. Le signe $\sum$ s'étend à tous ces couples de racines.

16. Dans le développement ordonné suivant les puissances ascendantes de x, on écrira d'abord les polynomes M, N, P sous la forme

$$f(y, z) + x f_1(y, z) + \ldots,$$

$$F(y, z) + x F_1(y, z) + \ldots,$$

$$\Phi(y, z) + x \Phi_1(y, z) + \ldots,$$

puis on déterminera les coefficients $\gamma, \gamma', \ldots, \delta, \delta', \ldots$ des divers termes des séries

$$y = \gamma + \gamma' x + \ldots, \quad z = \delta + \delta' x + \ldots,$$

fournies par les équations M=o, N=o, à l'aide des formules

$$f(\gamma, \delta) = 0, \quad \frac{df}{d\gamma}\gamma' + \frac{df}{d\delta}\delta' + f_1 = 0, \ldots,$$

$$F(\gamma, \delta) = 0, \quad \frac{dF}{d\gamma}\gamma' + \frac{dF}{d\delta}\delta' + F_1 = 0, \ldots;$$

et l'on trouvera :

1°. Que le dernier terme de X, c'est-à-dire le terme indépendant de x, est

$$\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots\ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn});$$

2°. Que le coefficient de l'avant-dernier terme de X est égal au produit du dernier terme par la somme

$$\sum \frac{\frac{d\Phi}{d\gamma}\gamma' + \frac{d\Phi}{d\delta}\delta' + \Phi_1}{\Phi},$$

où le signe $\sum$ s'étend à tous les couples $(\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_{mn}, \delta_{mn})$ fournis par les racines (γ, δ), etc.

17. De là résulte immédiatement que si l'on désigne par $\sum x$ la somme des racines

$$x_1, x_2, \ldots, x_{mnp},$$

de l'équation finale $X = 0$, résultant de l'élimination de y et de z entre les trois équations $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, on aura

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi};$$

on aura de même

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{\frac{d\Phi}{d\gamma}\gamma' + \frac{d\Phi}{d\delta}\delta' + \Phi_1}{\Phi};$$

et

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = \pm \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})}.$$

On obtiendra évidemment des formules semblables pour quatre équations à quatre inconnues, cinq équations à cinq inconnues, etc.

III.

18. Les théorèmes relatifs aux tangentes parallèles à une même droite et aux plans tangents parallèles à un même plan, à l'occasion desquels j'ai composé ce Mémoire, se démontrent aisément d'une manière directe à l'aide des formules posées plus haut.

Il faut, en premier lieu (n° 2), faire voir que si entre les deux équations algébriques

$$M(x, y) = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0,$$

on élimine une des deux inconnues, y par exemple, la somme $\sum x$ des racines de l'équation finale en x sera indépendante de a.

Or, si l'on pose

$$\frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = N,$$

et si l'on regarde les polynomes M, N, comme étant ceux dont il a été question dans les n^{os} **6**, ..., **13**, on aura, en reprenant les notations de ces numéros,

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

α étant en général une racine de $f(\alpha) = 0$, et α' satisfaisant à l'équation $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$. Mais ici la fonction N dépend de M, et par suite F et F_1 dépendent de f et f_1. A cause de

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

on trouve immédiatement que les fonctions $F(u)$ et $F_1(u)$ sont de cette forme

$$F(u) = mf(u) + (a-u)f'(u),$$
$$F_1(u) = (m-1)f_1(u) + (a-u)f_1'(u),$$

d'où

$$F'(u) = (m-1)f'(u) + (a-u)f''(u).$$

En faisant $u = \alpha$, et se rappelant que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$, il viendra donc

$$\frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)} = \frac{f''(\alpha)\alpha' + f_1'(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

quantité entièrement indépendante de a, d'où il suit que $\sum x$ est aussi une quantité indépendante de a; *C. Q. F. D.*

19. Arrêtons-nous ici un moment pour indiquer quelques conséquences curieuses que M. Duhamel a tirées, comme il suit, du théorème précédent.

Soit ω l'angle que fait avec l'axe des x la droite parallèlement à laquelle on mène les tangentes : on vient de voir que $\sum x$ est une quantité indépendante de ω; en faisant varier ω d'une quantité infiniment petite $d\omega$, ce qui produira dans x la variation infiniment petite dx, on aura donc $\sum dx = 0$, et par suite (à cause de l'égale inclinaison des tangentes sur l'axe des x) $\sum ds = 0$, s étant l'arc de la courbe. L'équation $\sum ds = 0$ nous apprend déjà que la somme des variations des arcs s résultant d'un changement dans la direction de la droite à laquelle les tangentes sont parallèles, est égale à zéro, en sorte que si quelques-uns de ces arcs augmentent d'une certaine quantité, les autres devront diminuer d'une quantité équivalente. Mais on a un théorème plus élégant en divisant l'équation $\sum ds = 0$ par la constante $d\omega$ que l'on peut faire passer sous le signe $\sum$, et en observant que le rapport de ds à $d\omega$ est précisément le rayon de courbure ρ, On obtient ainsi l'équation $\sum \rho = 0$, en sorte que « si l'on mène à » une courbe géométrique plane toutes ses tangentes parallèles à une » même droite, la somme des rayons de courbure relatifs aux divers » points de contact de ces tangentes, sera généralement égale à zéro. » On conclut de là sans difficulté que le centre des moyennes distances des centres de courbure relatifs aux divers points de contact est précisément le même que celui de ces points, et par conséquent ne dépend pas de la valeur de l'angle ω. Ajoutons que l'équation $\sum \rho = 0$ peut être à son tour différenciée ou intégrée par rapport à ω un nombre quelconque de fois, ce qui fournit de nouveaux théorèmes. En nommant ρ', ρ'',... les rayons de courbure des développées successives et se rappelant que $\rho' d\omega = d\rho$, $\rho'' d\omega = d\rho'$,..., on en conclut, par

exemple, $\sum \rho' = 0$, $\sum \rho'' = 0, \ldots$, ce qui est assez remarquable.

Dans un des numéros suivants, ces théorèmes se trouveront complétés par d'autres, d'un genre différent, qu'une analyse plus compliquée nous fournira. Nous démontrerons, en effet, qu'on a aussi

$$\sum \frac{1}{\rho} = 0 \text{ [*]},$$

d'où, en différentiant par rapport à ω, on pourra tirer

$$\sum \frac{\rho'}{\rho^2} = 0, \text{ etc.}$$

20. Occupons-nous maintenant des surfaces et proposons-nous de démontrer que « si l'on mène à une surface géométrique la série com- » plète des plans tangents parallèles à un plan donné, le centre des » moyennes distances des points de contact ne dépendra en aucune » manière de la position du plan donné. » En d'autres termes, considérons les trois équations algébriques suivantes, à trois inconnues,

$$M(x, y, z) = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dM}{dy} + b\frac{dM}{dz} = 0.$$

et prouvons que la somme $\sum x$ des racines de l'équation finale en x, résultant de l'élimination de deux des inconnues (y et z), sera indépendante de a et b.

Posons

$$\frac{dM}{dy} + b\frac{dM}{dz} = N, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dz} = P,$$

et considérons M, N, P comme étant les trois polynomes dont il a été question dans les n^{os} **14**,..., **17**. D'après une formule du n° **17**, nous aurons

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{dz}{dy}\alpha' + \frac{dz}{d\beta}\beta' + \gamma'}{\gamma'\alpha, \beta}.$$

[*] C'est la communication que j'avais faite de ce dernier théorème à la Société philomatique, qui a donné lieu aux remarques de M. Duhamel.

et je vais montrer que la quantité placée sous le signe $\sum$ dans le second membre est par exemple indépendante de a. En effet les polynomes N et P se déduisent ici de M, et de cette dépendance on conclut sans difficulté la forme des fonctions F, φ, F_1, φ_1, par rapport à leurs variables; on trouve, quels que soient u et v,

$$F(u, v) = \frac{df(u, v)}{du} + b\frac{df(u, v)}{dv},$$

$$F_1(u, v) = \frac{df_1(u, v)}{du} + b\frac{df_1(u, v)}{dv},$$

$$\varphi(u, v) = mf(u, v) - u\frac{df(u, v)}{du} + (a - v)\frac{df(u, v)}{dv},$$

$$\varphi_1(u, v) = (m - 1)f_1(u, v) - u\frac{df_1(u, v)}{du} + (a - v)\frac{df_1(u, v)}{dv}$$

Les équations qui fournissent α, β, α', β' sont donc

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df}{d\alpha} + b\frac{df}{d\beta} = 0,$$

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2f}{d\alpha^2} + b\frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\right)\alpha' + \left(\frac{d^2f}{d\alpha d\beta} + b\frac{d^2f}{d\beta^2}\right)\beta' + \frac{df_1}{d\alpha} + b\frac{df_1}{d\beta} = 0,$$

où l'on a, pour abréger, écrit f et f_1 au lieu de $f(\alpha, \beta)$ et $f_1(\alpha, \beta)$. Ces équations renferment le paramètre b, mais non le paramètre a. En vertu des deux premières, la valeur du dénominateur $\varphi(\alpha, \beta)$ peut être mise sous la forme

$$\varphi(\alpha, \beta) = \left(a - \beta + b\alpha\right)\frac{df}{d\beta}.$$

Quant au numérateur

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1,$$

on peut, dans son expression, supprimer d'abord la quantité

$$(m-1)\left(\frac{df}{dx}\alpha' + \frac{df}{d\zeta}\beta' + f_1\right)$$

qui est nulle, et cela fait, on reconnaît qu'il est la différence des deux termes suivants :

$$a-\beta)\left(\frac{d^2f}{dxd\zeta}\alpha' + \frac{d^2f}{d\zeta^2}\beta' + \frac{df_1}{d\zeta}\right),$$

et

$$\alpha\left(\frac{d^2f}{dx^2}\alpha' + \frac{d^2f}{dxd\zeta}\beta' + \frac{df_1}{dx}\right),$$

dont le second (d'après la dernière des quatre équations de condition écrites plus haut) est égal et de signe contraire à

$$b\alpha\left(\frac{d^2f}{dxd\zeta}\alpha' + \frac{d^2f}{dx^2}\beta' + \frac{df_1}{d\zeta}\right),$$

en sorte que la valeur du numérateur cherché devient

$$(a-\beta+b\alpha)\left(\frac{d^2f}{dxd\zeta}\alpha' + \frac{d^2f}{dx^2}\beta' + \frac{df_1}{dx}\right).$$

On voit dès lors qu'en le divisant par

$$\varphi\,\alpha,\beta = (a-\beta+b\alpha)\frac{df}{d\zeta},$$

le facteur $a-\beta+b\alpha$ disparaîtra, ce qui rendra le quotient indépendant de a, et par suite la valeur de $\sum x$ indépendante de a, conformément au théorème énoncé.

Nous n'avons pas besoin de dire qu'un théorème semblable a lieu et se démontre de la même manière pour un nombre quelconque d'équations et d'inconnues. Il est également inutile d'ajouter que nos formules fourniraient, si on le voulait, des démonstrations directes de plusieurs autres propositions analogues aux précédentes, et auxquelles les géomètres ont été conduits par des méthodes plus simples.

21. Il était intéressant de chercher si le théorème de M. Duhamel, relatif aux courbes planes, que l'on a démontré n° **19**, et qui est exprimé par l'équation $\sum \rho = 0$, a son analogue pour les surfaces. Voici les résultats que j'ai obtenus sur ce sujet.

Quels que soient les paramètres a, b, contenus dans l'équation

$$z = ax + by$$

d'un plan parallèlement auquel on mène une série de plans tangents à une surface géométrique donnée, les sommes $\sum x$, $\sum y$, $\sum z$ relatives aux coordonnées des points de contact sont constantes; si donc a et b éprouvent les variations infiniment petites da, db, et que par suite x, y, z reçoivent les accroissements dx, dy, dz, on aura

$$\sum dx = 0, \quad \sum dy = 0, \quad \sum dz = 0.$$

D'ailleurs, par la condition fondamentale du problème, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ de l'ordonnée z de la surface doivent être, aux points de contact, égales à a et b : la différenciation par rapport à a et b donnera donc

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}dy = da,$$
$$\frac{d^2z}{dxdy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy = db,$$

équations que l'on écrira sous une forme plus simple si l'on désigne, conformément à l'usage ordinaire, par r, s, t les trois dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; on trouvera ainsi

$$dx = \frac{tda - sdb}{rt - s^2}, \quad dy = \frac{rdb - sda}{rt - s^2};$$

par suite, les équations

$$\sum dx = 0, \quad \sum dy = 0,$$

se décomposeront dans les trois suivantes

$$\sum \frac{t}{rt - s^2} = 0, \quad \sum \frac{s}{rt - s^2} = 0, \quad \sum \frac{r}{rt - s^2} = 0;$$

l'équation $\sum dz = 0$ se décomposerait aussi dans deux équations qu'il serait aisé de former, mais qui deviendront identiques et inutiles si l'on suppose $a = 0$, $b = 0$, c'est-à-dire si l'on prend le plan des xy parallèle aux plans tangents menés à la surface géométrique. Les trois équations précédentes en r, s, t seront dès-lors des équations de condition entre les deux rayons de courbure principaux et les directions des sections principales relatives aux divers points de contact. En effet, les dérivées de z du premier ordre étant nulles, les élements de la courbure ne dépendront que des dérivées secondes r, s, t. En particulier l'on aura

$$\sum \frac{r + t}{rt - s^2} = 0,$$

et l'on en conclura, d'après les formules connues,

$$\sum (\rho + \rho') = 0,$$

ρ et ρ' étant les rayons de courbure principaux relatifs à chacun des points de contact.

Plus tard nous verrons qu'il existe entre les dérivées r, s, t, qui entrent dans les formules précédentes, beaucoup d'autres relations simples, et que, par exemple, on a

$$\sum \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) = 0, \quad \sum \left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \frac{\rho}{\rho'^2}\right) = 0, \text{ etc.}$$

IV.

22. Reportons-nous maintenant aux formules du n° **13** et du n° **17**, d'abord à celles du n° **13**, pour les transformer ou les interpréter géo-

métriquement et en déduire de nouveaux théorèmes. Ces formules du n° **13** sont, comme on l'a vu, relatives à deux courbes planes représentées par les deux équations $M(x, y) = 0$, $N(x, y) = 0$, dont les premiers membres peuvent être écrits à volonté sous l'une ou sous l'autre des deux formes suivantes :

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots,$$

$$N = x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots,$$

ou

$$M = f(y) + x f_1(y) + \ldots\ldots,$$

$$N = F(y) + x F_1(y) + \ldots\ldots:$$

la première de ces formes met en évidence les asymptotes des courbes, tandis que la seconde met en évidence leurs tangentes menées aux divers points où elles sont coupées par la transversale arbitraire que l'on a prise pour axe des y.

Cela posé, en tirant de la première équation la valeur de y pour la reporter dans la seconde, on a obtenu l'équation finale en x, et l'on a trouvé que la somme $\sum x$ des racines de cette équation finale est exprimée par la formule

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

α et α' étant déterminées par les équations $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$. Or cette somme $\sum x$ ne dépend que des fonctions f, f_1, F et F_1; par conséquent elle restera constante si l'on conserve ces fonctions en changeant comme on voudra les fonctions suivantes f_2, F_2, etc., sans pourtant leur faire dépasser le degré maximum qu'elles peuvent atteindre. Il est évident qu'un pareil changement n'altérerait pas non plus la somme $\sum y$ relative aux racines y de l'équation finale obtenue par

l'élimination de x, et que partant il n'altérerait pas davantage la position du centre des moyennes distances des points de rencontre des deux courbes.

Lorsque les fonctions f, f_1 restent les mêmes, les asymptotes de la première courbe, représentées généralement par l'équation $y = \alpha x + \alpha'$, restent aussi les mêmes. Réciproquement, si les mêmes asymptotes appartiennent à une autre courbe géométrique, il faudra que la fonction f relative à cette autre courbe fournisse les mêmes racines α quand on l'égalera à zéro, et par conséquent soit la même que la fonction primitive f, ou du moins n'en diffère que par un facteur constant qu'on peut à volonté introduire ou supprimer : l'identité établie entre les deux fonctions f, il faudra ensuite que la valeur de α' soit la même de part et d'autre ; il faudra donc que les deux quantités $f_1(\alpha)$ relatives aux deux courbes soient aussi égales pour les m racines α de $f(\alpha) = 0$; et comme les fonctions f_1 ne sont que de degré $(m - 1)$, il faudra par suite que ces fonctions soient identiques.

Ainsi, pour que deux courbes géométriques aient les mêmes asymptotes, il faut que les fonctions f, f_1, soient identiques dans les équations de ces deux courbes ou puissent être rendues identiques en multipliant une de ces équations par un facteur constant.

L'identité de la seule fonction f, à un facteur constant près, est la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotes de ces courbes soient parallèles chacune à chacune ; mais cette condition ne suffit pas pour que les asymptotes soient les mêmes de part et d'autre. Il faut y joindre, comme on vient de le voir, la condition nouvelle de l'identité des fonctions f_1 au même facteur constant près.

Si maintenant on se rappelle que le groupe total des asymptotes d'une courbe géométrique de l'ordre m forme aussi une ligne géométrique de l'ordre m que l'on peut regarder comme ayant les mêmes asymptotes que la première, on verra que le théorème donné tout à l'heure peut s'énoncer ainsi : « Le centre des moyennes distances des points » de rencontre de deux courbes géométriques est aussi le centre des » moyennes distances des points de rencontre des asymptotes de l'une » de ces deux courbes avec l'autre ou avec ses asymptotes. »

Ainsi en particulier : « Quand les asymptotes de deux courbes » géométriques passent toutes par un même point, ce point est le

» centre des moyennes distances des points de rencontre des deux » courbes. »

23. L'expression

$$\sum x = -\sum \frac{F'(z)\alpha' + F_1(z)}{F(z)},$$

de la somme des racines x de l'équation finale, devient

$$\sum x = \sum \frac{F'(z) f_1(z)}{F(z) f'(z)} - \sum \frac{F_1(z)}{F(z)},$$

lorsqu'on remplace α' par sa valeur. Elle est la somme de deux parties distinctes, dont l'une dépend de la fonction f_1 et varie proportionnellement à cette fonction f_1, de manière qu'elle augmente dans le rapport de g à l'unité lorsqu'on substitue à la fonction f_1 son produit gf_1 par une constante arbitraire g : la seconde dépend de F_1 et non plus de f_1. Ces deux parties ne s'offrent pas ici sous une forme semblable, et la cause en est que pour opérer l'élimination, on a résolu d'abord l'équation $M = 0$ par rapport à y, puis porté les racines y dans N, opérations dans lesquelles les deux polynomes M et N n'ont pas joué le même rôle. Mais on aurait pu effectuer l'élimination dans un ordre inverse, résoudre d'abord l'équation $N = 0$, puis substituer dans le polynome M les racines obtenues. De cette manière, en déterminant λ et λ' par les équations

$$F(\lambda) = 0, \quad F'(\lambda)\lambda' + F_1(\lambda) = 0,$$

on aurait évidemment trouvé

$$\sum x = \sum \frac{f'(\lambda) F_1(\lambda)}{f(\lambda) F'(\lambda)} - \sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)},$$

le signe $\sum$ s'étendant dans le second membre à toutes les racines λ.

Cette expression nouvelle de $\sum x$ doit être égale à l'ancienne. Comparant donc entre elles les parties qui dépendent des fonctions f_1 ou F_1

et qui varient proportionnellement à ces fonctions, on aura

$$\sum \frac{F'(\alpha) f_1(\alpha)}{F(\alpha) f'(\alpha)} = -\sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)},$$

$$\sum \frac{f'(\lambda) F_1(\lambda)}{f(\lambda) F'(\lambda)} = -\sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

et l'on en conclura cette forme symétrique de l'expression de $\sum x$, savoir,

$$\sum x = -\sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)} - \sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)},$$

où les deux $\sum$ du second membre sont relatifs, le premier aux racines de $f(\alpha) = 0$, le second aux racines de $F(\lambda) = 0$. Cette expression de $\sum x$ ne contient plus en dénominateur les dérivées f', F', et l'on peut observer en passant qu'elle ne serait pas, comme les précédentes, en défaut, quand même les équations

$$f(\alpha) = 0, \quad F(\lambda) = 0,$$

auraient des racines multiples, pourvu que ces équations n'aient aucune racine commune.

Remarquons aussi que les droites dont les équations sont $y = \alpha x$, ou $y = \lambda x$, c'est-à-dire les droites menées par l'origine parallèlement aux asymptotes de la première ou de la seconde courbe, coupent soit la seconde ou la première courbe, soit les asymptotes de la seconde ou de la première courbe, en des points dont les abscisses sont déterminées respectivement par des équations de la forme

$$x^m f(\lambda) + x^{m-1} f_1(\lambda) + \ldots = 0,$$

$$x^n F(\alpha) + x^{n-1} F_1(\alpha) + \ldots = 0:$$

la somme des abscisses des $2mn$ points de rencontre ainsi obtenus est

donc précisément égale à

$$-\sum \frac{f_1(\beta)}{f(\beta)} - \sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

ou à

$$\sum x;$$

l'abscisse de leur centre des moyennes distances est par suite

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum x}{mn},$$

c'est-à-dire qu'elle est égale à la moitié de l'abscisse du centre des moyennes distances des points où se coupent les deux courbes. L'origine des coordonnées et la direction de l'axe des abscisses sont d'ailleurs quelconques. On a donc ce théorème : « Deux courbes géométriques étant dans un même plan, si par un point O pris à volonté dans ce plan, on mène des parallèles aux asymptotes de la première, puis aux asymptotes de la seconde courbe, et qu'on cherche les points de rencontre de ces parallèles avec la seconde et la première courbe respectivement, ou avec leurs asymptotes, le centre des moyennes distances de ces points de rencontre sera généralement au milieu de la droite OC qui joint le point O au centre C des moyennes distances des points d'intersection des deux courbes. »

24. L'équation

$$\sum \frac{f'(\beta)\,F_1(\beta)}{f(\beta)\,F'(\beta)} = -\sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

que nous avons obtenue tout à l'heure d'une manière si simple, savoir, en égalant entre elles deux expressions différentes d'une même quantité $\sum x$, mérite d'être remarquée, non pas précisément en elle-même, mais à cause de la facilité avec laquelle elle s'étend aux fonctions de plusieurs variables et conduit ainsi à un beau théorème de M. Jacobi. En supposant la fonction F identique avec f', on voit que le premier membre s'évanouit de lui-même puisque le $\sum$ qui s'y trouve est relatif

aux racines de $F(\lambda) = f'(\lambda) = 0$. On a donc

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines α de l'équation $f(\alpha) = 0$. On suppose que l'équation $f = 0$ n'a pas de racines égales, mais f est d'ailleurs un polynome quelconque de degré m : quant au polynome F_1, il est aussi quelconque, mais de degré inférieur à F ou f', c'est-à-dire de degré $(m - 2)$ au plus.

Cette équation

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$$

est connue au moins depuis Euler, mais c'est M. Jacobi qui, le premier, l'a étendue aux fonctions de plusieurs variables dans le Mémoire cité (n° 3). Appliquée au cas où la fonction $f(\alpha)$ est de la forme

$$(\alpha - t)\,\varpi(\alpha),$$

elle fournit, comme on sait, la formule

$$\frac{F_1(t)}{\varpi(t)} = \sum \frac{F_1(t_i)}{(t - t_i)\,\varpi'(t_i)},$$

où t_i représente successivement toutes les racines de l'équation

$$\varpi(t_i) = 0.$$

Elle renferme donc implicitement toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Jusqu'ici nous admettons, il est vrai, que l'équation

$$\varpi(t_i) = 0$$

n'a que des racines inégales; mais on descend très-facilement de ce cas

général au cas particulier des racines égales, en remplaçant d'abord les racines égales par des racines inégales, infiniment peu différentes, puis passant à la limite après avoir convenablement préparé les expressions qu'on veut traiter. C'est précisément à cause de cette facilité bien connue avec laquelle on fait dépendre du cas général chacun des cas particuliers où les formules ordinaires paraissent en défaut, que nous nous sommes de préférence, dans ce Mémoire, attaché au cas général, laissant de côté les cas particuliers, dans le détail desquels il aurait été tres-long et peu utile d'entrer.

25. La formule du n° **15**.

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{F(y)y' + F_1 y}{F y},$$

donne lieu à des remarques semblables à celles que nous venons de présenter en nous occupant de $\sum x$; seulement les équations $M = 0$, $N = 0$, doivent alors être mises sous la forme

$$f y + x f_1(y) + \ldots\ldots = 0,$$

$$F y + x F_1(y) + \ldots\ldots = 0:$$

les tangentes menées aux divers points des courbes situées sur la transversale prise pour axe des y, remplaceront, comme on l'a déjà dit n° **9**, les asymptotes qui figuraient dans les énoncés précédents; les sommes d'abscisses se changeront en sommes des inverses des abscisses, et le centre des moyennes distances en centre des moyennes harmoniques. Nous nous bornerons naturellement à cette remarque générale que l'on développera sans peine.

26. L'équation

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn} = -1^{mn} \cdot \frac{F'(y_1)\, F'(y_2) \ldots F'(y_m)}{F(x_1) F(x_2) \ldots F(x_m)}$$

donne lieu aussi à des remarques utiles. Son second membre dépend des fonctions f, f, F, F, c'est-à-dire des directions des asymptotes de nos deux courbes, et des points où ces deux courbes rencontrent l'axe des y. Cela étant on voit sans peine que le produit $x_1 x_2 \ldots x_{mn}$ des abscisses des points d'intersection sera le même pour nos deux courbes (M), (N), ou pour deux autres lignes géométriques quelconques de même degré ayant chacune à chacune des asymptotes de même direction que (M), (N), et de plus coupant chacune à chacune l'axe des y dans les mêmes points. On pourra des-lors substituer à la première courbe (M) un groupe de m droites respectivement parallèles à ses m asymptotes et partant des m points où cette courbe coupe l'axe Oy; on pourra substituer à la seconde courbe (N) un groupe analogue : ces deux groupes, en effet, peuvent être regardés comme formant deux lignes géométriques, l'une du degré m, l'autre du degré n, et remplissant les conditions voulues. De là ce théorème : « Deux courbes géo-
» métriques de degrés m et n étant rapportées à deux axes coordonnés,
» le produit des abscisses de leurs points d'intersection est égal au pro-
» duit des abscisses des points d'intersection de deux groupes de droites,
» composés l'un de m parallèles aux m asymptotes de la première courbe
» menées par les m points où elle rencontre l'axe des y, l'autre de n
» parallèles aux n asymptotes de la seconde courbe menées de même
» par les points où elle coupe l'axe des y. »

27. Les deux produits $F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m)$, $F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m)$, dont la valeur de $x_1 x_2 \ldots x_{mn}$ dépend, peuvent recevoir une interprétation géométrique assez élégante. Admettons, ce qui est permis, qu'on ait préparé l'équation $N = 0$ de manière à rendre égal à l'unité le coefficient de y^n dans N : les coefficients de u^m et y^n dans les polynomes $F(u)$, $F(y)$ seront par suite égaux aussi à l'unité. En désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines de l'équation $F(\lambda) = 0$, et par $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ les racines de l'équation $F(\nu) = 0$, puis décomposant $F(u)$ et $F(y)$ en facteurs, on aura donc

$$F(u) = (u - \lambda_1)(u - \lambda_2) \ldots (u - \lambda_n),$$

$$F(y) = (y - \nu_1)(y - \nu_2) \ldots (y - \nu_n).$$

d'où résulte immédiatement

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m) = (-1)^{mn}.(\lambda_1-\alpha_1)(\lambda_1-\alpha_2)\ldots(\lambda_i-\alpha_j)\ldots,$$

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn}.(\nu_1-\gamma_1)(\nu_1-\gamma_2)\ldots(\nu_i-\gamma_j)\ldots,$$

l'indice i pouvant croître jusqu'à n et l'indice j jusqu'à m. Or $(\nu_1-\gamma_1), \ldots (\nu_i-\gamma_j), \ldots$ ne sont autre chose que les mn segments compris entre chacun des m points où la première courbe coupe l'axe des y et chacun des n points où la seconde courbe coupe ce même axe; quant aux facteurs $(\lambda_1-\alpha_1), \ldots, (\lambda_i-\alpha_j), \ldots$, prenons sur la partie négative de l'axe des x, à une distance de l'origine O des coordonnées égale à l'unité, un point fixe A, et nous verrons que ces facteurs représentent les mn segments compris entre chacun des m points où les parallèles aux asymptotes de la première courbe menées par le point A coupent l'axe des y et chacun des n points où les parallèles aux asymptotes de la seconde courbe, menées aussi par le point A, coupent ce même axe.

Soient $h_1, h_2, \ldots, h_{mn}$ les premiers segments, et $l_1, l_2, \ldots, l_{mn}$ les derniers : on aura

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn}.h_1\,h_2\ldots h_{mn},$$

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m) = (-1)^{mn}.\,l_1\,l_2\ldots l_{mn}.$$

Et, puisque

$$x_1\,x_2\ldots x_{mn} = (-1)^{mn}.\frac{F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)}{F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)},$$

on en conclura

$$x_1\,x_2\ldots x_{mn} = (-1)^{mn}.\frac{h_1\,h_2\ldots h_{mn}}{l_1\,l_2\ldots l_{mn}},$$

équation qui exprime une propriété très-générale des courbes géométriques. Les axes coordonnés que l'on emploie ici sont quelconques ainsi que l'origine des coordonnées.

28. Déplaçons cette origine sur l'axe des x sans changer la direction

de l'axe des y, en sorte que l'abscisse de chacun des points d'intersection de nos deux courbes diminue d'une constante g sans que l'ordonnée change : au point auxiliaire A relatif à l'ancienne origine O et situé à une distance $AO = 1$ de cette origine, correspondra un autre point auxiliaire A′ situé aussi à une distance $A'O' = 1$ de la nouvelle origine O′; les segments $h_1, h_2, \ldots, h_{mn}$ deviendront $H_1, H_2, \ldots, H_{mn}$, tandis que les segments $l_1, l_2, \ldots, l_{mn}$ conserveront leurs valeurs. On aura donc

$$(x_1 - g)(x_2 - g)\ldots(x_{mn} - g) = (-1)^{mn}.\frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{l_1 l_2 \ldots l_{mn}}.$$

De là résulte

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g)\ldots(x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}}.$$

En donnant à g un nombre suffisamment grand de valeurs particulières, on pourra, par les formules d'interpolation, en conclure, quel que soit g, la fonction entière de g placée au premier membre de cette équation, et former tous les termes de l'équation en x dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$.

Si l'on suppose la valeur de g infiniment petite, et si l'on représente par $dh_1, \ldots, dh_{mn}$ les accroissements infiniment petits $H_1 - h_1, \ldots, H_{mn} - h_{mn}$, on trouvera, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$-g\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{mn}}\right) \quad \text{ou} \quad -g\sum\frac{1}{x},$$

pour valeur du premier membre de l'équation

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g)\ldots(x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

et

$$\frac{dh_1}{h_1} + \ldots + \frac{dh_{mn}}{h_{mn}} \quad \text{ou} \quad \sum\frac{dh}{h},$$

pour valeur du second membre. Il s'ensuit

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{dh}{g},$$

équation qui fournit la valeur de $\sum \frac{1}{x}$ et qui rentre au fond dans celle que nous avons déjà donnée pour exprimer cette quantité. Pour l'interpréter géométriquement, observons que dans le voisinage de l'axe des y, et pour une abscisse comprise entre o et g, on peut remplacer les éléments de nos deux courbes par ceux de leurs tangentes. Cela étant, considérons un quelconque des segments h ou (MN) compris sur l'axe des y entre un point (M) de la première courbe et un point (N) de la seconde, puis menons par le point auxiliaire A qui nous a servi tout à l'heure des parallèles aux tangentes des deux courbes en (M) et (N) : soit k le segment intercepté sur l'axe des y par ces deux parallèles. On aura évidemment la proportion

$$dh : g :: k : 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{g} = k,$$

et par conséquent

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h} = -\frac{\Sigma k}{\Sigma h}.$$

Ainsi la somme des valeurs inverses des abscisses des points de rencontre de nos deux courbes géométriques est égale à la somme prise négativement des rapports de chacun des segments k au segment correspondant h, ou (ce qui revient au même) est égale au rapport pris négativement de la somme des segments k à la somme des segments h [*].

---

[*] Quand on divise par $(x_1 - g)$ les deux membres de la formule

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

et qu'on pose ensuite $g = x_1$, le rapport de H_1 à g se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais en se laissant guider par des considérations semblables aux précédentes, il est aisé de trou-

Une interprétation géométrique du même genre pourait être aisément trouvée pour les sommes

$$\sum \frac{1}{x^2}, \quad \sum \frac{1}{x^3}, \ldots, \quad \sum x, \quad \sum x^2, \ldots$$

pour $\sum \frac{1}{x^2}$, par exemple, on pourra recourir soit à la considération des rayons de courbure aux points M, (N), soit à celle de nouveaux segments que l'on déduira des segments k, à peu près comme on a déduit ceux-ci des segments h; pour $\sum \frac{1}{x^3}, \ldots$ on introduira dans les théorèmes les éléments qui dépendent des différentielles d'ordre supérieur. On obtiendra, du reste, les valeurs de ces diverses sommes en développant suivant les puissances de g (dont $H_1, H_2, \ldots, H_{mn}$ sont fonctions) les deux membres de l'équation

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

et comparant les coefficients des puissances semblables, ou bien encore on les déduira de la formule

$$\sum \frac{1}{x} = - \sum \frac{1}{h}.$$

---

ver la vraie valeur de ce rapport exprimée au signe près par un certain segment K_1. La formule

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 x_3 \ldots x_{mn}} \cdot \frac{x_{mn} - x_1}{x_2 x_3 \ldots x_{mn}} \cdot \ldots = \frac{K_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}}.$$

lorsqu'on y permute entre elles les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$, en tenant compte bien entendu des changements que cela entraîne dans les valeurs de $K_1, H_2, \ldots, H_{mn}$, conduit à plusieurs autres formules du même genre, dont le produit fait connaître la valeur de $(x_2 - x_1)^2 \ldots (x_i - x_j)^2 \ldots$ A peine est-il nécessaire de dire qu'après avoir mené par le point (x_1, y_1), où les deux courbes M et N se coupent une droite parallèle à l'axe Oy, on obtient le segment K_1 en cherchant la partie de cette droite comprise entre deux autres droites menées par un point auxiliaire ayant une abscisse égale à $(x_1 - 1)$ parallèlement aux deux tangentes en (x_1, y_1) aux deux branches des courbes respectives M et (N) qui se coupent en ce point.

en déplaçant sur l'axe des x l'origine des coordonnées sans changer la direction de l'axe des y; en effet, si g désigne la diminution que chaque abscisse éprouve dans ce déplacement, et si K et H représentent les valeurs nouvelles des segments k et h, on aura

$$\sum \frac{1}{x-g} = -\sum \frac{K}{H},$$

et pour en conclure les valeurs de $\sum \frac{1}{x^2}$, $\sum \frac{1}{x^3}, \ldots$, il suffira de développer les deux membres suivant les puissances croissantes de la quantité g supposée très-petite : enfin, pour $\sum x$, $\sum x^2, \ldots$, on supposera la valeur de g, non plus très-petite, mais très-grande, on développera les deux membres suivant les puissances descendantes de h, et l'on fera intervenir les asymptotes rectilignes, puis les asymptotes de tous les ordres.

29. Pour terminer, indiquons encore en peu de mots une autre manière d'exprimer géométriquement les produits

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m), \quad F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m).$$

Désignons toujours par γ une quelconque des racines $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ de $f(\gamma) = 0$, c'est-à-dire une quelconque des abscisses des points (M) de rencontre de la première de nos deux courbes avec l'axe des y : l'équation d'une droite menée par le point (M) parallèlement à l'axe des x sera $y=\gamma$: les abscisses des points où cette parallèle coupe la seconde courbe seront fournies par l'équation

$$F(\gamma) + x\,F_1(\gamma) + \ldots + x^n F_n = 0,$$

dans le premier membre de laquelle le coefficient F_n de x^n est une simple constante; et par conséquent le produit de ces abscisses sera égal à

$$(-1)^n \cdot \frac{F(\gamma)}{F_n}:$$

donc le produit total $x_1 x_2 \ldots x_{mn}$ des abscisses des points de rencontre de la seconde courbe avec les diverses parallèles menées à l'axe des x par les points où la première courbe rencontre l'axe des y sera lui-même égal à

$$(-1)^{mn} \cdot \frac{F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m)}{F_n^m},$$

et l'on aura

$$F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn} \cdot F \ldots x_1 x_2 \ldots x_{mn}.$$

Soit de même α une quelconque des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $f(\alpha) = 0$, et $y = \alpha x$ l'équation d'une parallèle menée par l'origine à l'asymptote de la première courbe dont l'équation est $y = \alpha x + \alpha'$: les abscisses des points de rencontre de cette parallèle avec la seconde courbe seront déterminées par l'équation

$$x^n F(\alpha) + x^{n-1} F_1(\alpha) + \ldots + F_n = 0,$$

dans le premier membre de laquelle F_n est une simple constante ; et par conséquent le produit de ces abscisses sera égal à

$$(-1)^n \cdot \frac{F_n}{F(\alpha)} :$$

donc le produit total $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mn}$ des abscisses des points de rencontre de la seconde courbe avec les parallèles menées aux asymptotes de la première courbe par l'origine des coordonnées sera lui-même égal à

$$(-1)^{mn} \cdot \frac{F_n^m}{F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m)}.$$

et l'on aura

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m) = (-1)^{mn} \cdot \frac{F_n}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mn}}.$$

F_n est le terme de N indépendant à la fois de x et y ; c'est par suite le

terme de $F(y)$ indépendant de y : en supposant donc, comme ci-dessus, le coefficient de y^n dans N réduit à l'unité, on trouvera

$$F_n = (-1)^n . \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n,$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_2$, étant les racines de l'équation $F(\nu) = 0$, ou les ordonnées des points d'intersection de la courbe (N) avec l'axe des y. D'un autre côté, si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les abscisses des points d'intersection de cette courbe (N) avec l'axe des x, on voit sans peine que

$$c_1 c_2 \ldots c_n = (-1)^n . \frac{F_n}{F'_n},$$

ce qui détermine F'_n. Substituant pour F_n et F'_n leurs valeurs ainsi obtenues dans les expressions des produits $F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m)$, $F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m)$, on en conclut

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m) = \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n^m}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m},$$

$$F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn} . \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n^m . x_1 x_2 \ldots x_m}{c_1 c_2 \ldots c_n^m}.$$

ces formules sont moins simples et moins élégantes que celles du n° **27** ; ici les seconds membres ne se présentent plus sous une forme symétrique par rapport aux deux courbes (M), (N); il en est de même du second membre de la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mn} = \frac{x_1 x_2 \ldots x_m \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m}{c_1 c_2 \ldots c_n^m}.$$

qui résulte immédiatement des précédentes. On pourrait examiner ce que donnent ces diverses équations, et en particulier la dernière, lorsqu'on remplace les deux courbes (M), (N) l'une par l'autre, ou lorsqu'on change la direction ou l'origine des coordonnées. On obtiendrait ainsi de nouveaux théorèmes. Mais en voilà bien assez sur ce sujet.

V.

30. Considérons actuellement les formules du n° **17**, qui sont relatives à trois équations à trois inconnues

$$M(x, y, z) = 0, \quad N(x, y, z) = 0, \quad P(x, y, z) = 0,$$

dont les premiers membres peuvent être mis à volonté sous l'une ou sous l'autre des deux formes suivantes

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$
$$N = x^n F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$
$$P = x^p \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{p-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

ou

$$M = f(y, z) + x f_1(y, z) + \ldots,$$
$$N = F(y, z) + x F_1(y, z) + \ldots,$$
$$P = \Phi(y, z) + x \Phi_1(y, z) + \ldots.$$

En tirant des deux premières équations $M = 0$, $N = 0$, les valeurs de y et z, on a obtenu l'équation finale en x, et l'on a trouvé que le produit des racines de cette équation finale est exprimé par la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})},$$

où $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_{mn}, \beta_{mn}), (\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_{mn}, \delta_{mn})$ représentent les couples (α, β) et (γ, δ) de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et $f(\gamma, \delta) = 0$, $F(\gamma, \delta) = 0$.

Mais on aurait pu former l'équation finale en x et le produit $x_1 x_2 \ldots x_{mnp}$ d'une autre manière, savoir, en tirant des deux dernières équations $N = 0$, $P = 0$ les valeurs de y et z pour les reporter dans la première, ou bien encore en résolvant la première et la dernière équa-

tion ($M = 0$, $P = 0$), puis portant les racines dans la seconde. En opérant ainsi l'on aurait trouvé par exemple,

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{f(\alpha_1, \beta_1) \ldots f(\alpha_{np}, \beta_{np})}{f(\lambda_1, \mu_1) \ldots f(\lambda_{np}, \mu_{np})},$$

$\alpha, \beta)$ représentant en général un couple de racines des équations simultanées $F(\alpha, \beta) = 0$, $\Phi(\alpha, \beta) = 0$, et (λ, μ) un couple de racines des équations simultanées $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$.

On doit conclure de là que les deux fractions

$$\frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})},$$

$$\frac{f(\alpha_1, \beta_1) \ldots f(\alpha_{np}, \beta_{np})}{f(\lambda_1, \mu_1) \ldots f(\lambda_{np}, \mu_{np})},$$

sont égales entre elles; de plus il faut ajouter qu'elles sont aussi égales à une troisième fraction de même forme dans laquelle entreraient, sous les signes F, F, les racines des équations simultanées $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, et $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$. Ce théorème s'étend sans difficulté aux fonctions de plusieurs lettres.

31. On peut regarder chacune des équations $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ comme représentant une surface. L'équation

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})}$$

fournit ainsi le produit des abscisses des points d'intersection de trois surfaces géométriques quelconques. La fraction qui exprime ce produit est susceptible d'une interprétation assez simple. Continuant à désigner par (α, β) un couple quelconque de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, déterminons α' et β' en fonction de α et β par les équations du n° **15**,

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + F_1 = 0:$$

les deux équations $y = \alpha x + \alpha'$, $z = \beta x + \beta'$ représenteront successivement les mn asymptotes rectilignes communes aux deux surfaces (M), (N); par suite $y = \alpha x$, $z = \beta x$ seront les équations d'une parallèle menée par l'origine des coordonnées à l'une de ces asymptotes. Les abscisses des points où cette parallèle coupe la surface (P) seront déterminées par l'équation

$$x^p \varphi(\alpha, \beta) + x^{p-1} \varphi_1(\alpha, \beta) + \ldots + \varphi_p = 0,$$

dans le premier membre de laquelle le dernier terme φ_p est une simple constante, et le produit de ces abscisses sera

$$(-1)^p \cdot \frac{\varphi_p}{\varphi(\alpha, \beta)}.$$

Donc le produit total $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}$ des abscisses des points où la surface (P) est rencontrée par les mn parallèles menées par l'origine des coordonnées aux asymptotes communes des deux autres surfaces (M), (N), sera exprimé par

$$(-1)^{mnp} \cdot \frac{\varphi_p^{mn}}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})}.$$

et l'on aura

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\varphi_p^{mn}}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}}.$$

De même, si l'on continue à représenter par (γ, δ) un couple quelconque de racines des équations simultanées $f(\gamma, \delta) = 0$, $F(\gamma, \delta) = 0$, on verra que les équations $y = \gamma$, $z = \delta$ représentent successivement les mn parallèles à l'axe des x que l'on peut mener par les mn points du plan des yz qui appartiennent à la fois aux deux surfaces (M) et (N). On reconnaîtra en outre que le produit $x_1 x_2 \ldots x_{mnp}$ des abscisses des points où ces parallèles coupent la troisième surface (P) est égal à la fraction

$$(-1)^{mnp} \cdot \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\Phi_p^{mn}}.$$

fraction dont le dénominateur est une simple constante, et l'on en conclura que

$$\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn}) = (-1)^{mnp} . \Phi_p^{mn} . \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp}.$$

Par suite, on aura

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = \pm \left(\frac{\Phi_p}{\varphi_p}\right)^{mn} . \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp} . \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}.$$

D'un autre côté si l'on désigne par $c_2, c_2, \ldots, c_n$ les abscisses des points où l'axe des x coupe la surface (P), on trouve sans difficulté

$$\frac{\varphi_p}{\Phi_p} = (-1)^p . c_1 c_2 \ldots c_p.$$

De là résulte la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mn} = \frac{\mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp} . \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}}{(c_1 c_2 \ldots c_p)^{mn}},$$

qui est une généralisation de celle du n° **29**.

32. On peut aussi, comme au n° **27**, faire usage d'un point auxiliaire A, situé sur la partie négative de l'axe des x, à une distance $AO = 1$ de l'origine des coordonnées. Il est facile de voir que si par ce point auxiliaire on mène des parallèles à toutes les asymptotes rectilignes de la surface (P), ces parallèles formeront un cône dont l'équation sera

$$\varphi\left(\frac{y}{x+1}, \frac{z}{x+1}\right) = 0.$$

Ce cône est coupé par le plan des yz suivant une courbe que l'on peut regarder comme sa base et dont l'équation est $\varphi(y, z) = 0$. D'un autre côté, une parallèle à l'une quelconque des asymptotes communes aux deux surfaces (M), (N) aura pour équations

$$y = \alpha(x+1), \quad z = \beta(x+1),$$

et percera le plan des yz en un point B dont les coordonnées seront $y=\alpha$, $z=\beta$. Menons par le point B une parallèle à l'axe Oz; les valeurs de z relatives aux points de rencontre de cette parallèle avec la base du cône seront fournies par l'équation $\varphi(\alpha, z) = 0$. Posons $z = \beta + l$, et admettons (ce qui est permis) qu'on ait réduit à l'unité le coefficient de z^p dans le polynome P, ce qui rendra aussi égaux à l'unité les coefficients de z^p dans $\varphi(y, z)$ et $\Phi(y, z)$: nous aurons

$$\varphi(\alpha, z) = \varphi(\alpha, \beta + l) = \varphi(\alpha, \beta) + \frac{l}{1}\frac{d\varphi(\alpha, \beta)}{d\beta} + \ldots + l^p;$$

l'équation dont l dépend deviendra

$$l^p + \ldots + \varphi(\alpha, \beta) = 0:$$

le produit $l_1 l_2 \ldots l_p$ de ses racines, c'est-à-dire le produit des segments compris entre le point B et les points où la parallèle à l'axe des z rencontre la base du cône, est donc égal à $(-1)^p . \varphi(\alpha, \beta)$. Donc le produit total $l_1 l_2 \ldots l_{mnp}$ des segments l qui répondent aux mn couples (α, β) est égal à

$$(-1)^{mnp} . \varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn}),$$

et réciproquement on a

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) = (-1)^{mnp} . l_1 l_2 \ldots l_{mnp}.$$

D'un autre côté, l'on a vu plus haut que les couples (γ, δ) représentent les coordonnées (y, z) des points du plan des yz qui appartiennent en même temps aux deux surfaces (M) et (N). Si par ces divers points on mène des parallèles à l'axe des z, le produit $h_1 h_2 \ldots h_{mnp}$ des segments compris entre chacun d'eux et les points où la parallèle correspondante rencontre la surface (P), aura pour valeur

$$(-1)^{mnp} . \Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn}),$$

et réciproquement on aura

$$\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn}) = (-1)^{mnp} h_1 h_2 \ldots h_{mnp}.$$

De tout ce qui précède on déduit la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{h_1 h_2 \ldots h_{mnp}}{l_1 l_2 \ldots l_{mnp}},$$

qui, si l'on déplace l'origine des coordonnées d'une quantité g sur l'axe des x, ce qui ne change rien aux segments $l_1, l_2, \ldots, l_{mnp}$, en fournit une seconde

$$(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mnp} - g) = (-1)^{mnp} \frac{\mathrm{H}_1 \mathrm{H}_2 \ldots \mathrm{H}_{mnp}}{l_1 l_2 \ldots l_{mnp}};$$

cette dernière, combinée avec la formule primitive, nous donne

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mnp} - g)}{x_1 x_2 \ldots \ldots x_{mnp}} = \frac{\mathrm{H}_1 \mathrm{H}_2 \ldots \mathrm{H}_{mnp}}{h_1 h_2 \ldots h_{mnp}}.$$

Ces diverses équations et celles du numéro précédent sont assez simples pour mériter qu'on les remarque : on pourra, si l'on veut, les comparer entre elles, et aussi les discuter en examinant ce qu'elles fournissent lorsqu'on remplace l'une par l'autre deux de nos trois surfaces ou lorsqu'on change les axes coordonnés.

33. Nous ne dirons rien de la formule du n° **17**, où entre la somme des valeurs inverses des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{mnp}$. Mais les diverses remarques que nous allons présenter sur la formule qui contient $\sum x$ s'appliqueront d'elles-mêmes, *mutatis mutandis*, à celle qui contient $\sum \frac{1}{x}$.

On a trouvé

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{d\varphi}{dx}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)},$$

le $\sum$ du second membre étant toujours relatif aux racines (α, β) des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, dont α' et β' se déduisent par les formules du n° **15**,

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + F_1 = 0.$$

Or une quelconque des asymptotes communes aux deux surfaces (M), (N) étant généralement représentée par les équations $y = \alpha x + \alpha'$, $z = \beta x + \beta'$, coupe la surface (P) en p points dont les abscisses sont déterminées par l'équation

$$x^p \varphi(\alpha, \beta) + x^{p-1}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1\right) + \ldots = 0;$$

la somme des abscisses dont nous parlons est donc égale à

$$-\frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)},$$

et pour toutes les asymptotes considérées ensemble, elle devient

$$-\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)} \quad \text{ou} \quad \sum x.$$

Il faut en conclure que « le centre des moyennes distances des points » d'intersection de trois surfaces géométriques coïncide avec le centre » des moyennes distances des points où l'une de ces surfaces prise à » volonté est rencontrée par les asymptotes rectilignes communes aux » deux autres. »

34. Résolvons les équations

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0,$$
$$\frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + F_1 = 0,$$

par rapport à α' et β'. En posant

$$A(\alpha, \beta) = \frac{dF}{d\alpha}\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{dF}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\alpha},$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{df}{d\beta} - \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{df}{d\alpha},$$

$$C(\alpha, \beta) = \frac{df}{d\alpha}\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\frac{dF}{d\alpha},$$

il nous viendra

$$\alpha' = \frac{F_1 \frac{df}{d\beta} - f_1 \frac{dF}{d\beta}}{C(\alpha, \beta)},$$

$$\beta' = \frac{f_1 \frac{dF}{d\alpha} - F_1 \frac{df}{d\alpha}}{C(\alpha, \beta)},$$

puis

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\alpha, \beta) A(\alpha, \beta) + F_1(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta) + \varphi_1(\alpha, \beta) C(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta) C(\alpha, \beta)}.$$

Mais pour obtenir cette expression de $\sum x$, on a opéré l'élimination en résolvant d'abord les équations $M = 0$, $N = 0$ par rapport à y et z, c'est-à-dire en prenant pour point de départ les racines (α, β) des équations $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$. Si l'on opérait l'élimination dans un autre ordre en résolvant d'abord les équations $N = 0$, $P = 0$, c'est-à-dire en prenant pour point de départ les racines (λ, μ) des équations $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, on trouverait évidemment

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu) + F_1(\lambda, \mu) B(\lambda, \mu) + \varphi_1(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu)};$$

le signe $\sum$ se rapporte ici aux racines (λ, μ).

Égalant cette valeur de $\sum x$ à la précédente, et supposant, pour plus de simplicité, les deux fonctions f_1, F_1 réduites à zéro, on aura donc

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{\varphi(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu)}.$$

le signe $\sum$ du second membre étant, comme on l'a déjà expliqué, relatif aux couples (λ, μ) de racines des équations simultanées $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, et celui du premier membre aux couples (α, β) de racines des équations $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$.

Il est évident qu'on trouverait de même

$$\sum \frac{F_1(\sigma, \tau)}{F(\sigma, \tau)} = \sum \frac{F_1(\lambda, \mu)\, B(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\, A(\lambda, \mu)},$$

(σ, τ) représentant les couples de racines des équations simultanées $f(\sigma, \tau) = 0$, $\varphi(\sigma, \tau) = 0$.

Il suit de tout cela que la valeur de $\sum x$ peut être mise sous cette forme symétrique

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)} - \sum \frac{F_1(\sigma, \tau)}{F(\sigma, \tau)} - \sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)}.$$

Ajoutons que la formule que nous venons d'écrire se traduit immédiatement par ce théorème. « Trois surfaces géométriques étant don-
» nées, cherchez le centre des moyennes distances de tous les points
» d'intersection de chacune de ces surfaces prises successivement avec
» les parallèles menées par un point fixe O aux asymptotes communes
» des deux autres : ce centre D sera situé sur la droite OC qui joint le
» point O au centre C des moyennes distances des points d'intersection
» des trois surfaces : de plus, la distance OD sera le tiers de OC. »

35. L'équation

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu)\, C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\, A(\lambda, \mu)}$$

répond, autant que la nature des fonctions de deux variables le permet, à la décomposition en fractions simples des fractions rationnelles dépendantes d'une seule variable. Les fonctions f, F, φ sont des fonctions entières de degrés quelconques, mais φ_1 est une fonction entière de degré inférieur au moins d'une unité au degré de φ. En supposant

$\varphi(u, v) = C(u, v)$, le second membre s'évanouit de lui-même à cause de $C(\lambda, \mu) = F(\lambda, \mu) = 0$. Il vient par suite

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0,$$

formule où le degré de $\varphi_1(\alpha, \beta)$ doit être inférieur au moins d'une unité au degré de $C(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire inférieur au moins de trois unités à la somme des degrés des deux polynomes $f(\alpha, \beta)$, $F(\alpha, \beta)$, formant les premiers membres des équations simultanées aux racines desquelles le signe $\sum$ se rapporte. Cette dernière équation

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0$$

renferme le théorème déjà cité de M. Jacobi.

36. Ce théorème est relatif aux fonctions de deux variables, et nous y sommes arrivés en considérant d'abord des équations à trois inconnues; c'est-à-dire qu'en géométrie nous avons obtenu un théorème relatif à des courbes planes en nous servant de surfaces auxiliaires et restituant à l'espace ses trois dimensions, comme les géomètres modernes l'ont souvent pratiqué avec succès. On obtiendra un théorème semblable pour les fonctions de trois variables, en passant par les équations à quatre inconnues, et ainsi de suite.

Considérons en général des équations $M = 0$, $N = 0, \ldots$, $P = 0$, $Q = 0$, en nombre quelconque et contenant un nombre égal d'inconnues $x, y, \ldots, z$; groupons entre eux les termes homogènes de même degré, et donnons aux premiers membres de ces équations la forme

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$$N = x^n F\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P = x^p \varphi\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{p-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$$Q = x^q \psi\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{q-1} \psi_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$f(u, \ldots, w)$, $F(u, \ldots, w)$, etc., étant généralement des polynomes de degrés m, n, etc., et $f_i(u, \ldots, w)$, $F_i(u, \ldots, w)$, etc., des polynomes de degrés $m-i$, $n-i$, etc. tout au plus. Pour obtenir, d'après la méthode du § II, la somme des racines de l'équation finale en x, résultant de l'élimination de $y, \ldots, z$, il suffira de chercher d'abord les couples $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ de racines des équations simultanées

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \ldots, \quad \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0,$$

puis de déterminer $\alpha', \beta', \ldots, \gamma'$ par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{df}{d\gamma}\gamma' + f_1 = 0,\\
&\frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{dF}{d\gamma}\gamma' + F_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{d\varphi}{d\gamma}\gamma' + \varphi_1 = 0,
\end{aligned}$$

où, pour abréger, l'on a écrit f, f_1, etc., au lieu de $f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, $f_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, etc. Cela fait, on aura

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{d\psi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\psi}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{d\psi}{d\gamma}\gamma' + \psi_1}{\psi},$$

formule qui se simplifiera beaucoup et nous donnera

$$\sum x = -\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)},$$

dans le cas particulier où les fonctions f_1, $F_1, \ldots, \varphi_1$ sont supposées identiquement nulles.

Mais pour obtenir ces diverses formules, on a résolu d'abord les premières équations $M = 0$, $N = 0, \ldots, P = 0$, par rapport à $y, \ldots z$, et l'on a substitué les racines dans le polynome Q. On arrivera à d'autres résultats si l'on résout les dernières équations $N = 0, \ldots, P = 0$, $Q = 0$, pour substituer ensuite leurs racines dans le polynome M.

En désignant alors par $(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ un couple quelconque de racines des équations simultanées

$$F(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \ldots, \quad \varphi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \quad \psi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0,$$

puis déterminant $\lambda', \mu' \ldots, \nu'$ par les équations

$$\begin{aligned}
&\frac{dF}{d\lambda}\lambda' + \frac{dF}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{dF}{d\nu}\nu' + F_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d\varphi}{d\lambda}\lambda' + \frac{d\varphi}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{d\varphi}{d\nu}\nu' + \varphi_1 = 0,\\
&\frac{d\psi}{d\lambda}\lambda' + \frac{d\psi}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{d\psi}{d\nu}\nu' + \psi_1 = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a écrit pour abréger F, etc., au lieu de $F(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$, etc., on aura

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{df}{d\lambda}\lambda' + \frac{df}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{df}{d\nu}\nu' + f_1}{f}:$$

quand on suppose $f_1 = 0$, $F_1 = 0, \ldots, \varphi_1 = 0$, comme ci-dessus, on doit d'abord supprimer le dernier terme du numérateur de la fraction placée sous le signe $\sum$: d'ailleurs, pour former les valeurs de $\lambda', \mu' \ldots, \nu'$, il faut, d'après la règle connue pour la résolution des équations du premier degré, chercher d'abord ce que Laplace nomme la *résultante* du système

$$\begin{aligned}
&\frac{dF}{d\lambda}, \frac{dF}{d\mu}, \ldots, \frac{dF}{d\nu},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d\varphi}{d\lambda}, \frac{d\varphi}{d\mu}, \ldots, \frac{d\varphi}{d\nu},\\
&\frac{d\psi}{d\lambda}, \frac{d\psi}{d\mu}, \ldots, \frac{d\psi}{d\nu}:
\end{aligned}$$

soit $A(\lambda, \mu \ldots, \nu)$ cette résultante, où l'on mettra, si l'on veut, les

dérivées de ψ en évidence en désignant par (λ), (μ), ... (ν) des coefficients indépendants de ψ, puis écrivant

$$A(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = (\lambda)\frac{d\psi}{d\lambda} + (\mu)\frac{d\psi}{d\mu} + \ldots + (\nu)\frac{d\psi}{d\nu}.$$

$A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ sera le dénominateur commun des fractions qui représentent les racines λ', μ', ..., ν': le numérateur de λ', par exemple, s'en déduira en remplaçant

$$\frac{dF}{d\lambda} \text{ par } -F_1 \text{ ou par zéro},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} \text{ par } -\varphi_1 \text{ ou par zéro},$$

$$\frac{d\psi}{d\lambda} \text{ enfin par } -\psi_1:$$

vu la composition connue des coefficients (λ), (μ), ..., (ν), cela ne changera rien à (λ) qui ne renferme aucune dérivée relative à λ, et au contraire annullera (μ), ..., (ν) : on aura ainsi

$$\lambda' = -\frac{(\lambda)\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)},$$

et de même

$$\mu' = -\frac{(\mu)\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}, \ldots, \nu' = -\frac{(\nu)\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}.$$

En posant donc

$$(\lambda)\frac{df}{d\lambda} + (\mu)\frac{df}{d\mu} + \ldots + (\nu)\frac{df}{d\nu} = -D(\lambda, \mu, \ldots, \nu),$$

il viendra

$$\sum x = -\sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{f(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}.$$

Comparant cette nouvelle expression à l'ancienne, on en conclura la

formule générale annoncée n° **4** :

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = \sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{f(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)};$$

d'où, pour le cas de $\psi(u, v, \ldots, w) = D(u, v, \ldots, w)$, il résulte en particulier

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = 0.$$

Dans cette dernière formule le degré de ψ_1 doit être inférieur au degré de D; dans la formule générale il doit être inférieur au degré de ψ. On passe de l'expression de $A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ à celle de $D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ en y remplaçant ψ par $-f$: réciproquement $A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ se déduirait de $D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ en y changeant f en $-\psi$; il ne servirait à rien d'ajouter que $D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ est la *résultante* du système

$$\begin{array}{l}
\dfrac{df}{d\lambda}, \quad \dfrac{df}{d\mu}, \quad \ldots, \quad \dfrac{df}{d\nu}, \\[2ex]
\dfrac{dF}{d\lambda}, \quad \dfrac{dF}{d\mu}, \quad \ldots, \quad \dfrac{dF}{d\nu}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex]
\dfrac{d\varphi}{d\lambda}, \quad \dfrac{d\varphi}{d\mu}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d\varphi}{d\nu}.
\end{array}$$

37. Comme le cas des fonctions de trois variables nous sera utile par la suite, nous en ferons ici mention expresse. Soient donc $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ quatre fonctions entieres de x, y, z: désignons par (α, β, γ) un couple quelconque de racines des trois équations simultanées

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et par (λ, μ, ν) un couple quelconque de racines des équations

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0, \quad \varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0, \quad \psi(\lambda, \mu, \nu) = 0:$$

représentons de plus par $D(x, y, z)$ la somme des trois quantités

$$\frac{df}{dx}\left(\frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

$$\frac{df}{dy}\left(\frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

$$\frac{df}{dz}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

et par $A(x, y, z)$ ce que devient l'expression de $D(x, y, z)$ lorsqu'on y remplace f par $-\psi$; soit enfin $\psi_1(x, y, z)$ une fonction entière de degré inférieur à ψ : on aura en général

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \gamma)} = \sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{f(\alpha, \beta, \gamma)} \frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{A(\alpha, \beta, \gamma)};$$

et si $\psi(x, y, z) = D(x, y, z)$, il viendra en particulier

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = 0,$$

le degré de ψ_1 étant bien entendu inférieur alors au degré de D.

VI.

38. Les formules que nous venons de démontrer fournissent un grand nombre de théorèmes de géométrie. Donnons-en ici quelques-uns.

Au n° **35** on a trouvé

$$\sum \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{G(\alpha, \beta)} = 0,$$

le signe $\sum$ étant relatif aux racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et $G(\alpha, \beta)$ représentant la quantité

$$\frac{df}{d\alpha}\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\frac{dF}{d\alpha}.$$

En appliquant cette belle formule de M. Jacobi aux rayons de courbure relatifs aux divers points de contact des tangentes que l'on peut mener à une courbe géométrique parallèlement à une droite donnée, on obtient d'abord l'équation

$$\sum \frac{1}{\rho} = 0,$$

que j'ai annoncée à la fin du n° **19**.

Rapportons, en effet, la courbe géométrique à deux axes rectangulaires Ox, Oy, et supposons l'axe Ox parallèle à la direction commune des tangentes. Si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe proposée, les coordonnées (α, β) des points de contact dont nous nous occupons seront fournies par les deux équations

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0,$$

et l'expression algébrique de la valeur inverse du rayon de courbure ρ, qui devient ici très-simple à cause de l'équation

$$\frac{df(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0,$$

sera

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)}{\left(\frac{df}{d\beta}\right)}.$$

Cela étant, il suffit de prendre

$$F(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx}, \quad \varphi(x, y) = \left[\frac{d^2 f(x, y)}{dx^2}\right]^2,$$

puis d'appliquer la formule de M. Jacobi, pour arriver à l'équation

$$\sum \frac{1}{\rho} = 0,$$

qu'on veut démontrer. De cette équation convenablement différentiée se déduisent d'autres équations dont j'ai dit un mot à la fin du n° **19**.

39. La formule de M. Jacobi, appliquée aux fonctions de trois variables, c'est-à-dire la formule

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = 0$$

du n° **37**, fournit des théorèmes analogues pour les surfaces. Considérons, en effet, une surface géométrique et la série complete des points de contact des plans tangents que l'on peut mener à cette surface parallelement à un plan donné. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, et supposons le plan des xy parallèle à chacun des plans tangents. Les coordonnées (α, β, γ) des points de contact dont nous parlons seront fournies par trois équations de la forme

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\beta} = 0.$$

Cela posé, dans la formule

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = 0,$$

prenons

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\alpha}, \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\beta};$$

et, en supprimant les termes de $D(\alpha, \beta, \gamma)$ où se trouvent en facteurs les dérivées $\frac{df}{d\alpha}$, $\frac{df}{d\beta}$, qui sont égales à zéro, il nous viendra

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\frac{df}{d\gamma}\left[\frac{d^2f}{d\alpha^2}\frac{d^2f}{d\beta^2} - \left(\frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\right)^2\right]} = 0.$$

Le degré du numérateur $\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)$ doit être inférieur au degré du dénominateur. Or cette condition sera remplie si l'on choisit, par exemple, pour ψ_1 une fonction homogène et du troisième degré des trois dérivées partielles

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2}, \quad \frac{d^2f}{d\alpha d\beta}, \quad \frac{d^2f}{d\beta^2},$$

c'est-à-dire si l'on fait

$$\psi_1(\alpha, \beta, \gamma) = g\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)^3 + h\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)^2\left(\frac{d^2 f}{d\alpha d\beta}\right) + \ldots,$$

g, h, etc. étant des constantes. D'un autre côté, si l'on désigne, conformément à l'usage ordinaire, par r, s, t les dérivées partielles de l'ordonnée z ou γ de la surface géométrique dont $f(x, y, z) = 0$ est l'équation, et si l'on observe que les dérivées premières sont nulles ici en vertu des équations $\frac{df}{d\alpha} = 0$, $\frac{df}{d\beta} = 0$, on trouvera

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = -\frac{df}{d\gamma} r, \quad \frac{d^2 f}{d\alpha d\beta} = -\frac{df}{d\gamma} s, \quad \frac{d^2 f}{d\beta^2} = -\frac{df}{d\gamma} t.$$

En substituant donc ces valeurs dans la somme $\sum$, on aura cette équation générale

$$\sum \frac{gr^3 + hr^2 s + \ldots}{rt - s^2} = 0,$$

qui, vu l'indétermination des constantes g, h, etc., se décomposera dans dix autres équations particulières, entre les quantités r, s, t, dont dépendent pour chacun des points de contact (α, β, γ) les rayons de courbure principaux ρ, ρ' et la direction des lignes de courbure ou, ce qui revient au même, l'angle que la tangente à l'une de ces lignes de courbure fait avec l'axe des x.

Parmi ces dix équations, on peut remarquer les deux suivantes :

$$\sum \frac{(r+t)(rt - s^2)}{rt - s^2} = \sum (r + t) = 0,$$

$$\sum \frac{(r+t)^3 - 3(r+t)(rt - s^2)}{rt - s^2} = 0,$$

qui, d'après les formules

$$r + t = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}, \quad rt - s^2 = \frac{1}{\rho\rho'},$$

auxquelles se réduisent les formules connues quand les dérivées du premier ordre sont nulles, donnent immédiatement

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)=0,\quad \sum\left(\frac{\rho'}{\rho^2}+\frac{\rho}{\rho'^2}\right)=0.$$

40. Revenons aux fonctions de deux variables et à la formule

$$\sum\frac{\varphi_1(\alpha,\beta)}{C(\alpha,\beta)}=0.$$

Conservons au polynome $f(x, y)$ toute sa généralité, mais prenons

$$F(x,y)=x^2+y^2-a^2,\quad \varphi_1(x,y)=\frac{df(x,y)}{dy}.$$

Admettons de plus que les coordonnées soient rectangulaires. Les équations

$$F(x,y)=0,\quad f(x,y)=0,$$

représenteront respectivement un cercle et une courbe géométrique quelconque. En nous rappelant que la tangente trigonométrique de l'angle ω qu'une touchante à cette dernière courbe fait avec l'axe des x, est exprimée au signe près par le rapport des deux dérivées de f, nous tirerons de la formule de M. Jacobi l'équation

$$\sum\frac{\cos\omega}{\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega}=0,$$

où le signe $\sum$ s'étend à tous les points d'intersection du cercle avec la courbe, et qui prend une forme plus élégante, savoir,

$$\sum\frac{\cos\omega}{a\cos(\omega-\theta)}=0,$$

lorsqu'on remplace les coordonnées rectangulaires α, β par leurs valeurs $a\cos\theta$, $a\sin\theta$, en coordonnées polaires. On en conclut aisément ce théorème de géométrie plane : « Si par les points d'intersection d'un

» cercle donné et d'une courbe géométrique on mène des normales à
» la courbe et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre avec une
» transversale quelconque passant par le centre du cercle, la somme
» des valeurs inverses des segments compris entre ce centre et les pieds
» des normales sera égale à zéro [*]. »

On obtiendra une foule de théorèmes du même genre en prenant pour l'équation $F(x, y) = 0$, non plus celle d'un cercle, mais d'une hyperbole, d'une ellipse, et généralement d'une courbe géométrique simple. Il y a aussi des théorèmes analogues pour les surfaces.

VII.

41. Occupons-nous maintenant de la formule

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu)\, C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\, A(\lambda, \mu)},$$

que nous avons démontrée n° **34** et dont celle de M. Jacobi est un cas particulier. On se rappelle que la somme du premier membre est relative aux racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et celle du second membre aux racines des équations $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$: de plus on a

$$C(\lambda, \mu) = \frac{df}{d\lambda}\frac{dF}{d\mu} - \frac{df}{d\mu}\frac{dF}{d\lambda},$$
$$A(\lambda, \mu) = \frac{dF}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\mu} - \frac{dF}{d\mu}\frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Mais au lieu de $\varphi_1(x, y)$ il nous sera plus commode d'écrire $\varpi(x, y)$.

---

[*] J'ajouterai qu'en nommant ρ le rayon de courbure de la courbe géométrique en un quelconque des points (α, β), et N la longueur de la normale correspondante, on a

$$\sum \frac{(N + \rho)\cos\omega}{\rho\cos^3(\omega - \theta)} = 0.$$

On démontre cette formule en différenciant par rapport à a celle qui résulte du théorème énoncé dans le texte. La différenciation dont je parle s'effectue bien facilement à l'aide d'une figure. On obtient d'autres relations entre les rayons de courbure ρ et les angles ω, θ, quand on déplace le centre du cercle au lieu de faire varier le rayon a.

La formule que nous allons considérer sera donc

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varpi(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu)},$$

le degré de ϖ étant inférieur au degré de φ, puisque le degré de φ_1 remplissait cette condition.

Désignons par t un paramètre que nous ferons plus tard infini; admettons que ce paramètre entre dans l'expression de la fonction φ et que cette fonction soit de la forme

$$\varphi(x, y) = (t - x)\,\theta(x, y).$$

A cause des deux facteurs de φ, les racines (λ, μ) se décomposeront en deux groupes distincts : les unes que nous continuerons à désigner par (λ, μ) seront fournies par les équations simultanées

$$F(\lambda, \mu) = 0, \quad \theta(\lambda, \mu) = 0;$$

les autres devront être représentées par (t, ζ), ζ satisfaisant à l'équation

$$F(t, \zeta) = 0.$$

En posant d'ailleurs

$$\frac{dF(x, y)}{dx}\frac{d\theta(x, y)}{dy} - \frac{dF(x, y)}{dy}\frac{d\theta(x, y)}{dx} = H(x, y),$$

on s'assure aisément que

$$A(\lambda, \mu) = (t - \lambda)\,H(\lambda, \mu), \quad A(t, \zeta) = \theta(t, \zeta)\frac{dF(t, \zeta)}{d\zeta}.$$

Par suite il viendra

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{(t - \alpha)\,\theta(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varpi(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{(t - \lambda) f(\lambda, \mu) H(\lambda, \mu)} + \sum \frac{\varpi(t, \zeta) C(t, \zeta)}{f(t, \zeta)\,\theta(t, \zeta)\frac{dF(t, \zeta)}{d\zeta}}.$$

La fonction $\varpi(x, y)$ est assujettie à cette seule condition d'être de degré inférieur à $\varphi(x, y)$. Nous pouvons donc admettre et nous admettrons

désormais que $\varpi(x, y)$ et $\theta(x, y)$ sont du même degré p. Nous désignerons de plus par m, n les degrés respectifs de $f(x, y)$, $F(x, y)$, et groupant entre eux, comme au n° **7**, les termes homogènes de nos fonctions, nous écrirons

$$f(x, y) = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$F(x, y) = x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varpi(x, y) = x^p \varpi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{p-1} \varpi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\theta(x, y) = x^p \theta\left(\frac{y}{x}\right) + x^{p-1} \theta_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots:$$

on pourra écrire aussi

$$C(x, y) = x^{m+n-2} C\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$H(x, y) = x^{n+p-2} H\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

les fonctions $C(u)$, $H(u)$,... étant bien faciles à calculer, puisque l'on a

$$C(u) = m f(u) F'(u) - n f'(u) F(u),$$

$$H(u) = n F(u) \theta'(u) - p F'(u) \theta(u),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela étant, multiplions par t les deux membres de la formule obtenue tout à l'heure, et voyons ce qu'ils deviennent pour $t = \infty$.

Il n'y a d'abord aucune difficulté pour les deux sommes

$$\sum \frac{t\varpi(\alpha, \beta)}{(t-\lambda)\theta(\alpha, \beta)}, \quad \sum \frac{t\varpi(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{(t-\lambda) f(\lambda, \mu) H(\lambda, \mu)},$$

lesquelles, pour $t = \infty$, se réduisent respectivement à

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\theta(\alpha, \beta)}, \quad \sum \frac{\varpi(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu) H(\lambda, \mu)}.$$

C'est donc la troisième somme

$$\sum \frac{t\,\varpi(t,\zeta)\,C(t,\zeta)}{f(t,\zeta)\,\theta(t,\zeta)\,\frac{dF(t,\zeta)}{d\zeta}}$$

qui doit seule nous occuper. Or pour des valeurs de t très-grandes le rapport de ζ à t, fourni par l'équation

$$F(t,\zeta) = t^n F\left(\frac{\zeta}{t}\right) + t^{n-1} F_1\left(\frac{\zeta}{t}\right) + \ldots = 0,$$

est sensiblement constant et égal à une des racines l de l'équation

$$F(l) = 0.$$

Dans les mêmes circonstances, les diverses fonctions contenues sous le signe $\sum$ peuvent, comme on le voit aisément, être remplacées par leurs premiers termes. Ainsi pour $t = \infty$, la somme proposée devient en général

$$\sum \frac{\varpi(l)\,C(l)}{f(l)\,\theta(l)\,F'(l)},$$

ce qui fournit l'équation remarquable

$$\sum \frac{\varpi(\alpha,\beta)}{\theta(\alpha,\beta)} = \sum \frac{\varpi(\lambda,\mu)\,C(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)\,H(\lambda,\mu)} + \sum \frac{\varpi(l)\,C(l)}{f(l)\,\theta(l)\,F'(l)},$$

où le degré de $\varpi(x,y)$ est égal à celui de $\theta(x,y)$. Cette analyse montre comment la quantité

$$\sum \frac{\varpi(\alpha,\beta)}{\varphi(\alpha,\beta)},$$

que la formule du n° **54** fournissait pour le cas seulement d'une fonction $\varpi(x,y)$ de degré inférieur à $\varphi(x,y)$, peut être calculée quand $\varpi(x,y)$ est de degré égal à $\varphi(x,y)$. En continuant à peu près de la même manière, on s'élèvera au cas où le degré de $\varpi(x,y)$ surpasse celui de $\varphi(x,y)$ d'une ou de plusieurs unités. Je n'insiste pas sur ce

point, et je me contente aussi de dire en passant que des considérations analogues s'appliquent à la formule du n° **36**, relative aux fonctions de plusieurs lettres.

42. Quand on prend

$$\varsigma(x, y) = C(x, y), \quad \text{d'où} \quad \varsigma(l) = C(l),$$

on trouve en particulier

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varpi(l)}{f(l)\, F'(l)}.$$

Le second membre dépend uniquement des fonctions $f(l)$, $F(l)$, $\varpi(l)$, c'est-à-dire de la direction des asymptotes des trois courbes représentées par les trois équations $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$, $\varpi(x, y) = 0$. Le degré de $\varpi(x, y)$ est ici égal à celui de $C(x, y)$. Si le degré de cette dernière fonction était inférieur d'une unité à celui de $\varpi(x, y)$, la valeur de

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)}$$

dépendrait en outre des fonctions $f_1(l)$, $F_1(l)$, $\varpi_1(l)$, c'est-à-dire de la position des asymptotes citées. En général, on peut démontrer que si le degré de $\varpi(\alpha, \beta)$ surpasse de i unités celui de $C(\alpha, \beta)$, la valeur de

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)}$$

dépend des seules fonctions $f(l)$, $F(l)$, $\varpi(l)$, ..., $f_i(l)$, $F_i(l)$, $\varpi_i(l)$, dont l'indice ne surpasse pas i.

43. Que l'on prenne

$$\varpi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} \frac{dF(x, y)}{dx},$$

ou

$$\varpi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} \frac{dF(x, y)}{dy},$$

ou enfin

$$\varpi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} \frac{dF(x, y)}{dy},$$

le degré de $\varpi(x, y)$ sera dans chacun de ces trois cas égal à celui de $C(x, y)$: de plus la direction des asymptotes de la courbe ϖ sera évidemment déterminée par celle des asymptotes des deux autres courbes (f), (F). Donc, d'après ce qui précède, les trois valeurs correspondantes de la somme

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)},$$

où le signe $\sum$ s'applique à tous les points (α, β) d'intersection des deux courbes (f), (F), dépendront uniquement de la direction des asymptotes de ces deux courbes. En supposant les coordonnées x, y rectangulaires, et désignant par ω et Ω les angles que font avec l'axe des x les tangentes menées par le point (α, β) aux deux branches de courbe qui s'y coupent, les sommes dont nous parlons prennent (au signe près) la forme

$$\sum \frac{\sin\Omega \sin\omega}{\sin(\Omega - \omega)}, \quad \sum \frac{\cos\Omega \sin\omega}{\sin(\Omega - \omega)}, \quad \sum \frac{\cos\Omega \cos\omega}{\sin(\Omega - \omega)};$$

elles sont relatives aux angles que font avec une transversale fixe (prise ici pour axe des x) les tangentes menées successivement à chaque point d'intersection de nos deux courbes. De là trois théorèmes de géométrie consistant en ce que les sommes indiquées conserveraient les mêmes valeurs si les angles ω et Ω se rapportaient non plus aux deux courbes primitives, mais à deux autres courbes de même degré ayant chacune à chacune des asymptotes parallèles, ou bien encore si ces angles étaient respectivement ceux d'une asymptote de la première courbe et d'une asymptote de la seconde courbe avec la transversale fixe [*].

En ajoutant la première somme à la troisième, on obtient la somme

[*] Si l'on multipliait par une fonction linéaire des coordonnées α, β, les termes placés sous le signe sommatoire, on obtiendrait de nouveaux théorèmes, car les sommes ainsi formées ne dépendraient que de la position des asymptotes de nos deux courbes.

nouvelle $\sum \cot(\Omega - \omega)$, et l'on en conclut que : « la somme des co-
» tangentes des angles sous lesquels se coupent deux courbes géo-
» métriques situées dans un même plan, est égale à la somme des
» cotangentes des angles sous lesquels se coupent leurs asymp-
» totes [*]. »

Des théorèmes que nous venons de démontrer on déduira de nombreuses conséquences si l'on fait varier par degrés insensibles la forme ou la position des deux courbes (f), (F) [**]. Un seul exemple nous suffira.

Déplaçons la courbe (f) parallèlement à l'axe des x, en augmentant d'une quantité constante et infiniment petite g les ordonnées de tous ses points, sans changer leurs abscisses. Les directions des asymptotes resteront les mêmes; par suite la variation de $\sum \cot(\Omega - \omega)$ devra être nulle, et l'on aura

$$\sum \frac{\delta\Omega - \delta\omega}{\sin^2(\Omega - \omega)} \quad \text{ou} \quad \sum (\delta\Omega - \delta\omega) \operatorname{cosec}^2(\Omega - \omega) = 0.$$

Soient M le point où les courbes (f), (F) se coupaient d'abord, M′ leur point d'intersection actuel, et I le point qui, dans la nouvelle position de (f), répond au point primitif M, c'est-à-dire à la même abscisse. A cause de $MI = g$, le triangle infinitésimal MIM′ nous donnera

$$MM' = \frac{g \cos\omega}{\sin(\Omega - \omega)}, \quad IM' = \frac{g \cos\Omega}{\sin(\Omega - \omega)},$$

---

[*] A ces théorèmes répondent d'autres théorèmes corrélatifs élégants que fournit le principe de réciprocité ou de dualité des géomètres modernes. Ainsi M. Chasles, à qui j'avais communiqué le théorème concernant $\sum \cot(\Omega - \omega)$, m'a donné en réponse l'énoncé suivant : « Deux courbes géométriques étant dans un même plan, si l'on mène » toutes leurs tangentes communes, que d'un point fixe pris arbitrairement on tire deux » rayons aboutissant aux deux points de contact de chacune de ces tangentes, et qu'on » prenne l'angle des deux rayons, la somme des cotangentes de ces angles sera égale à la » somme des cotangentes des angles que les tangentes menées par le point fixe à la pre- » mière courbe feront avec les tangentes menées par le même point à la deuxième courbe. »

[**] Cette remarque s'applique à toutes les formules que nous avons données dans ce Mémoire et en particulier à celles qui fournissent les produits ou les sommes tant directes qu'inverses des abscisses des points d'intersection de deux courbes ou de trois surfaces géométriques.

de sorte qu'en nommant r, R les rayons de courbure des deux courbes (f), (F) au point d'intersection M, et observant que la tangente menée en M à la courbe (f) s'est transportée en I parallèlement à elle-même, on aura, par une propriété connue de l'angle de contingence,

$$\delta\Omega = \frac{g\cos\omega}{R\sin(\Omega-\omega)}, \quad \delta\omega = \frac{g\cos\Omega}{r\sin(\Omega-\omega)};$$

de là résulte la formule

$$\sum\left(\frac{\cos\omega}{R} - \frac{\cos\Omega}{r}\right)\operatorname{coséc}^3(\Omega-\omega) = 0.$$

L'axe à partir duquel on compte les angles ω et θ étant quelconque, cette formule doit subsister quand on augmente à la fois ces deux angles d'une même quantité, de $\frac{\pi}{2}$ par exemple; il s'ensuit qu'on a aussi

$$\sum\left(\frac{\sin\omega}{R} - \frac{\sin\Omega}{r}\right)\operatorname{coséc}^3(\Omega-\omega) = 0.$$

44. En terminant ce long Mémoire, je répéterai encore qu'il ne renferme aucun principe nouveau. La méthode d'élimination que j'ai employée et qui m'a conduit à diverses formules plus ou moins utiles, se trouve, par exemple, indiquée en peu de mots à la page 55 de l'ouvrage que Waring a publié en 1762, sous ce titre : *Miscellanea analytica de æquationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*. Observons, du reste, qu'on aurait pu substituer aux développements en série, dont j'ai fait usage dans les premiers numéros, des différenciations équivalentes. En effet, les coefficients des polynomes que j'ai désignés par X, se déduisent des dérivées successives de X relatives à la valeur particulière $x = 0$, et ces dérivées sont faciles à obtenir en regardant les autres lettres y, etc., comme exprimant des fonctions implicites de x, en vertu des équations dont elles sont racines.

SUR

LE DEGRÉ DE L'ÉQUATION FINALE

QUI RÉSULTE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. MINDING [*].

(Cet article est traduit de l'allemand. Voir le Journal de M. Crelle, tome XXII.)

On connaît différentes méthodes pour déduire de deux équations algébriques entre deux inconnues, une nouvelle équation qui ne contienne plus qu'une seule inconnue; mais souvent on désire connaître seulement le degré de cette équation finale sans la former, et, si je ne me trompe, on n'a point encore donné de règle pour trouver facilement ce degré. On sait bien que si les deux équations sont respectivement des degrés h et k, c'est-à-dire si la plus grande somme des exposants des deux inconnues dans un terme est h pour l'une et k pour l'autre, le degré de l'équation finale est au plus égal au produit hk; mais on n'a ainsi qu'une limite que le degré souvent n'atteint pas. Pour déterminer ce degré exactement, il est nécessaire avant tout de bien établir la véritable forme de l'équation finale.

[*] Ce Mémoire de M. Minding, publié du reste avant le mien, en est pour ainsi dire le complément. Je me suis attaché de préférence au cas général, et M. Minding a traité les cas particuliers. Dans le cas général, où les équations en x et y sont complètes, B_i et A_i sont des polynomes de degré i; B_0 et A_0 sont de simples constantes; par suite le produit $f(x, y_1)\, f(x, y_2) \ldots f(x, y_n)$ est évidemment une fonction entière de x; enfin le premier terme du développement de chacune des racines y en série ordonnée suivant les puissances descendantes de x est de la forme αx. Mais dans certains cas particuliers tout cela change, et si l'on veut traiter directement ces cas particuliers, il faut avoir recours aux procédés de M. Minding. (*J. Liouville.*)

Soient les deux équations

$$(1)\quad f(x, y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots + A_{m-1} y + A_m = 0,$$

$$(2)\quad \varphi(x, y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \ldots + B_{n-1} y + B_n = 0,$$

dans lesquelles les lettres A et B affectées d'indices représentent des polynomes quelconques entiers en x. Si l'on résout l'équation (2) par rapport à y, qu'on représente ses racines par $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et qu'on forme le produit

$$(3)\qquad P = f(x, y_1) f(x, y_2) \ldots f(x, y_n).$$

$B_0^m . P$ est une fonction entière de x; de plus si l'on pose

$$(4)\qquad B_0^m . P = \psi(x),$$

l'équation finale demandée est

$$(5)\qquad \psi(x) = 0.$$

Pour voir que $B_0^m . P$ est une fonction entière, il faut remarquer d'abord que P est une fonction rationnelle de x qui ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de B_0, quand les fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui entrent dans P sont exprimées en x par le moyen de l'équation (2). En désignant une de ces fonctions symétriques par

$$S = y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n} + \text{etc.},$$

où les termes se déduisent du premier en y permutant $y_1 y_2 \ldots y_n$, aucun des exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ne peut être plus grand que m. Si l'on pose

$$S_1 = \frac{1}{y_1^{m-m_1} y_2^{m-m_2} \ldots y_n^{m-m_n}} + \text{etc.},$$

on a

$$S = (y_1 y_2 \ldots y_n)^m . S_1 = (-1)^{mn} . \frac{B}{B^m} . S_1;$$

S_1 est une fonction entière et symétrique des inverses des racines de l'équation (2), et par conséquent la valeur de S_1 est une fraction ra-

tionnelle en x, qui ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de B_n. On a donc

$$S_1 = \frac{z}{B_n^\lambda},$$

z étant une fonction entière de x ou plutôt une fonction entière des polynomes $B_0, B_1, \ldots, B_n$, et λ un nombre entier positif. Il vient donc

$$S = (-1)^{mn} \cdot \frac{B_n^m \cdot z}{B^m \cdot B_n^\lambda}.$$

Mais comme S ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de B_0, il faut que B_n^λ divise le numérateur de cette fraction; de sorte que $B_0^m \cdot S$ et par conséquent aussi $B_0^m P = \psi(x)$ est une fonction entière.

En désignant par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ les racines de l'équation (1) résolue par rapport à y, posant

$$Q = \varphi(x, \eta_1)\, \varphi(x, \eta_2) \ldots \varphi(x, \eta_m),$$

et remarquant que

$$\varphi(x, \eta_1) = B_0(\eta_1 - y_1)(\eta_1 - y_2) \ldots (\eta_1 - y_n),$$
$$\text{etc.},$$

on a

$$Q = B_0(\eta_1 - y_1) \ldots (\eta_1 - y_n) \times B_0(\eta_2 - y_1) \ldots (\eta_2 - y_n) \times \ldots$$
$$\times B_0(\eta_m - y_1) \ldots (\eta_m - y_n);$$

et puisque

$$A_0(y_1 - \eta_1)(y_1 - \eta_2) \ldots (y_1 - \eta_m) = f(x, y_1),$$
$$\text{etc.},$$

il s'ensuit que

$$(6) \qquad A^n \cdot Q = (-1)^{mn} \cdot B_0^m \cdot P.$$

On conclut de là que $\psi(x) = 0$ est l'équation finale demandée. Car pour chaque valeur de x qui répond à la question, on a nécessairement $P = 0$ (et aussi $Q = 0$), par conséquent $\psi(x) = 0$. Si cette équation pouvait contenir un facteur superflu, on aurait pour ce facteur $\psi(x) = 0$ sans avoir en même temps $P = 0$, ni $Q = 0$; donc à cause des

équations (4) et (6), A_0 et B_0 devraient s'évanouir en même temps, ce qui n'est pas possible en général. Si dans un cas particulier A_0 et B_0 ont un facteur commun, le polynome $\psi(x)$ est aussi divisible par ce facteur, parce qu'il est toujours, comme on le voit aisément, de la forme

$$\psi(x) = A_0 U + B_0 V,$$

où U et V sont des polynomes entiers; mais comme on peut exclure ce cas en changeant infiniment peu les coefficients sans changer leurs degrés, il s'ensuit que l'équation $\psi(x) = 0$ ne fournit jamais de racine étrangère à la question.

Le degré du polynome $\psi(x)$ s'obtient maintenant de la manière suivante. On a

$$\psi(x) = B_0^n f(x, y_1) . f(x, y_2) \ldots f(x, y_n).$$

Si l'on développe les racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (2) suivant les puissances décroissantes de x, et qu'on substitue à la place de ces racines leurs développements en séries dans l'expression précédente, toutes les puissances fractionnaires et négatives de x devront se détruire mutuellement, et l'on devra retrouver le polynome $\psi(x)$. Comme on ne cherche que son degré, on remplacera chaque série par son premier terme, qui sera de la forme $c_1 x^{h_1}$ pour y_1, $c_2 x^{h_2}$ pour y_2, etc. On connaît suffisamment les moyens de former ces séries, et en particulier de trouver les plus hauts exposants $h_1, h_2, \ldots, h_n$. (Voyez, par exemple, le grand Traité de Lacroix, tome I, page 223.) On déterminera ensuite le plus haut exposant de x dans chacune des fonctions $f(x, c_1 x^{h_1})$, $f(x, c_2 x^{h_2})$, ..., ou *les degrés* des fonctions $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, ..., que nous désignerons par $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Ces degrés peuvent être entiers ou fractionnaires, mais ne sont pas négatifs, parce que A_n est au moins du degré zéro. Enfin, si l'on désigne par b le degré de B_0, la somme

$$(7) \qquad mb + k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

est nécessairement un nombre entier qui exprime le plus haut exposant de x dans $\psi(x)$ ou le degré cherché de l'équation finale. Dans des cas particuliers, on peut encore considérer les valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pour voir si le coefficient du terme du plus haut degré dans l'un des facteurs

$f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots$ de $\psi(x)$ et conséquemment dans $\psi(x)$ même devient nul, auquel cas il faudrait tenir compte des termes suivants des développements en séries de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Sans pousser plus loin cette indication, il est clair qu'en général la formule (7) représente le véritable degré du polynome $\psi(x)$.

Soient, par exemple, les deux équations suivantes, où l'on représente par la notation (x^μ) un polynome en x du degré μ:

$$f(x, y) = (x^2)y^3 + (x^2)y^2 + (x^4)y^2 + (x^5)y + (x^5) = 0.$$
$$\varphi(x, y) = (x^5)y^5 + (x^6)y^4 + (x^9)y^3 + (x^4)y^2 + (x^4)y + (x^4) = 0.$$

Ces équations sont du sixième et du treizième degré. Le degré de l'équation finale ne peut donc surpasser $6.13 = 78$. Pour le trouver exactement, qu'on calcule les degrés des racines y de $\varphi(x, y) = 0$; on trouve

$$h_1 = h_2 = \tfrac{1}{2}, \quad h_3 = h_4 = h_5 = -\tfrac{5}{3}.$$

On conclut de là les degrés de $f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots$, savoir :

$$k_1 = k_2 = \tfrac{11}{2}, \quad k^3 = k_4 = k_5 = 5.$$

D'ailleurs $B_0 = (x^8)$ donne $b = 8$ et $m = 4$. Donc le degré de l'équation finale est

$$mb + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 4.8 + 11 + 15 = 58.$$

Si l'on ordonne les équations proposées par rapport à x au lieu de y, pour chercher le degré de l'équation finale en y d'après la règle précédente, on ne trouvera pas toujours pour ce degré la même valeur que pour celui de l'équation finale en x. Pour expliquer cette circonstance, il faut remarquer que l'équation finale en x donne seulement les valeurs *finies* de x propres à satisfaire aux deux équations proposées. Donc si l'équation finale en y est d'un degré plus élevé que celle en x, il y a nécessairement quelques racines de l'équation en y qui correspondent à des valeurs infinies de x. On pourra toujours mettre en évidence ces valeurs de x, en altérant infiniment peu les coefficients dans l'une des équations proposées, et par-là rendre égaux les degrés des deux équations finales. Soient les équations (1) et (2) ordonnées par

rapport à x,

$$f(x, y) = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_p = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \beta_0 x^q + \beta_1 x^{q-1} + \ldots + \beta_q = 0,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$, sont des polynomes entiers en y. Si A_0 n'a pas de facteur commun avec B_0, ni α_0 avec β_0, on ne peut avoir ni une valeur infinie de y pour une valeur finie de x, ni une valeur infinie de x pour une valeur finie de y. Alors les degrés des équations finales en x et en y ne peuvent pas différer l'un de l'autre. Quand il y aura des facteurs communs entre A_0 et B_0 ou entre α_0 et β_0, on n'aura qu'à changer un coefficient dans A_0 ou dans α_0 pour ramener au même degré les équations finales, en x et y. Si l'on suppose ensuite ces changements nuls, on jugera, d'après les coefficients des termes les plus élevés des équations finales combien de valeurs de x et combien de valeurs de y sont devenues infinies, et combien les deux équations admettent de solutions finies. Cette marche de calcul n'est pourtant pas nécessaire, si l'on emploie convenablement la règle exposée plus haut. Soient, par exemple, les deux équations

$$(a + bx^2)y^4 + (c + ex)y^2 + gx^3y + h + kx^2 + lx^3 = 0,$$
$$\xi x^2 y^2 + (\eta + \delta x^2)y + \lambda + \mu x^4 = 0,$$

ou, en les ordonnant par rapport à x,

$$(l + gy)x^3 + (k + by^4)x^2 + ey^2x + h + cy^2 + ay^4 = 0,$$
$$\xi y^2 x^2 + \mu x^4 + \delta y x^2 + \lambda + \eta y = 0.$$

On a ici

$$A_0 = a + bx^2, \quad B_0 = \xi x^2, \quad \alpha_0 = l + gy, \quad \beta_0 = \xi y^2.$$

Donc si a et l ne sont pas nuls, il n'y a pas de facteur commun entre A_0 et B_0, ni entre α_0 et β_0, et l'on trouvera les degrés des deux équations finales en x et y égaux au même nombre 26. Mais si l'on suppose a et l nuls en même temps, on trouve 25 pour le degré de l'équation finale en x, et 24 pour celle en y. Donc, par l'évanouissement de a et de l, deux racines de l'équation finale en y précédente, et une de

celle en x, deviennent infinies; mais en même temps la nouvelle équation finale en x devient divisible par x^2, facteur commun de A_0 et B_0, et de même la nouvelle équation en y devient divisible par y, facteur commun de α_0 et β_0. Des 26 solutions finies qu'avaient les équations primitives, il en reste encore 23 quand a et l s'évanouissent; les trois autres deviennent

$$x_{24} = 0, \quad y_{24} = \infty, \quad | \quad x_{25} = 0, \quad y_{25} = \infty, \quad | \quad x_{26} = \infty, \quad y_{26} = 0.$$

On voit comment on trouve le nombre *des solutions finies* par la double application de la règle établie et la comparaison des résultats.

P. S. Après avoir terminé cet article, j'ai eu connaissance d'un nouvel ouvrage intitulé : *Système d'Algèbre*, par le Dr Finck, professeur à Strasbourg, dans lequel se trouve, page 405, pour la détermination du degré de l'équation finale, une règle bien plus précise que celle que j'ai rappelée au commencement de ce Mémoire. En voici l'énoncé :

Si tous les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_m$, de l'équation (1) sont du degré m', et tous les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$ de l'équation (2) du degré n', le degré du polynome $\psi(x)$ (qui égalé à zéro donne l'équation finale) est $mn' + nm'$. La démonstration de ce théorème, qui occupe deux pages du livre, se déduit très-simplement de ce qui précède; car dans le cas actuel toutes les valeurs de y en x tirées de l'équation (2) sont du degré 0, de sorte que $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$: conséquemment $k_1 = k_2 = \ldots = m'$, en même temps $h = n'$, puisque B_0 est du degré n'. Donc le degré de l'équation finale

$$mh + k_1 + k_2 + \ldots + k_n = mn' + nm'. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Si l'on applique cette règle aux cas où les coefficients sont de degrés inégaux, le résultat qu'elle donne n'est plus certain, parce qu'il suppose qu'on rende les degrés égaux, ce qui introduit des racines étrangères. Dans notre procédé pour trouver le degré de $\psi(x)$, on emploie au contraire les degrés des coefficients tels qu'ils sont donnés.

PROBLÈMES

DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR E. CATALAN.

I.

Un cône a pour base un petit cercle d'une sphère donnée, et pour sommet un point de la surface sphérique. On demande la mesure de l'angle conique.

PREMIÈRE SOLUTION.

Je prends pour origine le sommet du cône; pour plan des zx, le plan diamétral principal commun aux deux surfaces; je suppose l'axe des z perpendiculaire au plan de la base du cône. Enfin, les trois axes seront rectangulaires.

Cela étant, l'équation de la sphère peut s'écrire

$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2=1,$$

sous la condition

$$\alpha^2+\gamma^2=1.$$

On trouve facilement que l'équation du cône est de la forme

$$(x^2+y^2)(\gamma+\delta)^2-z^2(R^2-\alpha^2)-2\alpha\gamma+\delta)zx=0,$$

en prenant

$$\delta^2+R^2=1.$$

Mais

$$R^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \delta^2;$$

ce qui donne plus simplement

$$(\gamma + \delta)(x^2 + y^2) - z^2(\gamma - \delta) - 2\alpha z x = 0.$$

Maintenant, pour avoir la mesure de l'angle conique, je coupe le cône par une sphère concentrique, ayant pour rayon l'unité. Son équation sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

La courbe d'intersection des deux surfaces se projettera sur le plan des zx, suivant une courbe du second degré, dont l'équation est

$$2z(\gamma z + \alpha x) = \gamma + \delta.$$

Si l'on construit l'hyperbole représentée par cette équation, et le cercle qui a pour rayon l'unité, la portion de surface sphérique qu'il s'agit d'évaluer se trouvera projetée sur l'espace compris entre ces deux courbes. D'ailleurs, comme cette surface est partagée en deux parties symétriques par le plan zx, on aura, en représentant son aire par A :

$$A = 2\int\int \frac{dx\,dz}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}}.$$

En prenant des coordonnées polaires, cette formule devient

$$A = 2\int\int \frac{\rho\,d\rho\,d\omega}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Avant d'aller plus loin, il convient, pour simplifier l'intégration, de transformer les axes.

L'équation polaire de la courbe est

$$2\rho^2[\gamma \sin\omega + \alpha \cos\omega]\sin\omega = \gamma + \delta.$$

Je déplace l'axe polaire d'un angle indéterminé m, en prenant

$$\omega = m + \varphi.$$

En même temps, je fais

$$\gamma = \cos\lambda, \qquad \alpha = \sin\lambda.$$

L'équation devient

$$2\rho^2 \sin(m + \varphi + \lambda)\sin(m + \varphi) = \gamma + \delta.$$

ou

$$\rho^2 [\cos\lambda - \cos(2m + 2\varphi + \lambda)] = \gamma + \delta.$$

Je vais disposer de m, de façon que ρ^2 ne change pas, quand on remplace θ par $-\theta$. Il est clair qu'il suffit de poser

$$2m + \lambda = \pi;$$

d'où

$$m = \frac{\pi - \lambda}{2}.$$

L'équation polaire est actuellement

$$\rho^2 = \frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\varphi};$$

et nous aurons

$$A = 4\int_0^1\int_0^{\varphi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

On devra intégrer, par rapport à ρ, de

$$\rho = \sqrt{\frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\varphi}}$$

jusqu'à

$$\rho = 1;$$

et par rapport à θ, de

$$\theta = 0 \text{ à } \theta = \theta_1;$$

ce dernier arc étant déterminé par l'équation

$$1 = \frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\theta_1},$$

qui donne

$$\cos 2\theta_1 = \delta.$$

En intégrant par rapport à ρ, l'on obtient

$$A = 4\int_0^{\theta_1} d\theta \sqrt{1 - \frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\theta}},$$

ou

$$A = 4\int_0^{\theta_1} d\theta \sqrt{\frac{\cos 2\theta - \delta}{\cos 2\theta + \gamma}}.$$

Pour réduire en fonctions elliptiques, je pose

$$\operatorname{tang}\theta = p\sin\varphi;$$

d'où

$$d\theta = \frac{p}{1 + p^2\sin^2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi, \quad \cos 2\theta = \frac{1 - p^2\sin^2\varphi}{1 + p^2\sin^2\varphi},$$

$$\frac{\cos 2\theta - \delta}{\cos 2\theta + \gamma} = \frac{(1 - \delta) - p^2(1 + \delta)\sin^2\varphi}{(1 + \gamma) - p^2(1 - \gamma)\sin^2\varphi}.$$

Prenons pour valeur de l'indéterminée,

$$p = \sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}}:$$

ceci est permis, car

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}};$$

donc l'arc θ croissant de 0 à θ_1, φ croîtra de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

L'intégrale qu'il s'agit de réduire devient

$$A = 4p\sqrt{1-\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1+p^2\sin^2\varphi}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+\gamma-\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)\left(1-\gamma\sin^2\varphi\right)}}.$$

En posant

$$c^2 = \frac{1-\delta}{1+\delta}\,\frac{1-\gamma}{1+\gamma},$$

et remplaçant p par sa valeur, elle se transforme facilement en

$$A = \frac{8}{\sqrt{(1+\gamma)(1+\delta)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}c^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

$$-4\sqrt{\frac{1+\delta}{1+\gamma}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Donc

$$A = \frac{8}{\sqrt{(1+\gamma)(1+\delta)}}\,\Pi_1\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}c^2, c\right) - 4\sqrt{\frac{1+\delta}{1+\gamma}}\,F_1 c$$

Si l'on suppose

$$\alpha = 0,$$

ce qui donne

$$\gamma = 1,$$

la formule générale peut s'exprimer sous forme finie, et l'on trouve

$$A = 2\pi\left(1-\sqrt{\frac{1+\delta}{2}}\right),$$

ainsi qu'on peut le vérifier directement.

Pour exprimer A, seulement par des fonctions de première et de se

conde espèce, je pose

$$n = \cot^2 \mu;$$

et je prends la formule de Legendre (*Exercices*, tome Ier, page 137),

$$\frac{\Delta(b, \mu)}{\sin\mu\cos\mu}\,\Pi_1(n, c) = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\sin\mu}{\cos\mu}\,\Delta(b, \mu)\,F_1(c) + F_1(c)\,F(b, \mu)$$

$$- F_1(c)\,E(b, \mu) - E_1(c)\,F(b, \mu).$$

On a

$$\cot^2 \mu = \frac{1-\delta}{1-\delta}, \qquad \sin\mu = \sqrt{\frac{1-\delta}{2}}, \qquad \cos\mu = \sqrt{\frac{1-\delta}{2}}.$$

$$b^2 = 1 - c^2 = 2\,\frac{\delta+\gamma}{1-\delta\,(1+\gamma)}, \qquad \sqrt{1 - b^2\sin^2\mu} = \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\gamma}}, \text{ etc.};$$

et enfin,

$$A = 2\pi + 4\,[F_1(c)\,F(b, \mu) - F_1(c)\,E(b, \mu) - E_1(c)\,F(b, \mu)].$$

SECONDE SOLUTION.

Le problème dont nous venons de développer la solution peut encore s'énoncer en ces termes :

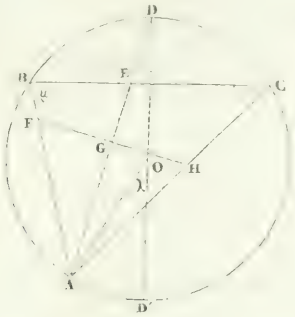
Un cône oblique à base circulaire étant donné, on le coupe par une sphère concentrique, et l'on demande de calculer la portion de surface sphérique interceptée.

Dans une précédente Note [*], nous avons résolu la même question pour le cas d'un *cône droit à base elliptique;* mais comme un cône oblique à base circulaire peut toujours être regardé comme étant droit et à base elliptique, il est évident que la question actuelle rentre dans l'autre. Il

---

[*] Page 340 de ce volume (cahier de septembre).

résulte de cette observation, que la valeur de A, que nous venons de calculer directement, doit pouvoir se conclure de celle qui se trouvait dans la Note précitée.



Soit ABDC la section faite dans la sphère par un plan diamétral, passant par le sommet du cône, perpendiculairement à sa base. La trace du plan de cette base sur celui de la figure, ou le diamètre du petit cercle de la sphère, sera BC. Soient BA et AC les arêtes *minimum* et *maximum* du cône. Représentons par λ l'angle AOD′ que forme le rayon AO mené au sommet du cône avec le diamètre DD′ perpendiculaire à sa base, et par μ l'angle ABC.

Si nous joignons AD, cette droite, bissectrice de l'angle BAC, sera l'axe du cône. Prenons AG = OD = 1, et par le point G, menons un plan perpendiculaire à AG : la section faite dans ce cône sera une ellipse ayant FH pour petit axe et G pour centre. Si le lecteur se reporte à la Note déjà citée, il verra que FG = b. L'autre demi-axe, qui se projette en G, est celui que nous avions représenté par a. Calculons ces deux quantités.

L'inspection de la figure donne facilement

$$A = \pi + \lambda - 2\mu.$$

$$AC = 2\sin\mu, \quad BC = 2\sin(2\mu - \lambda), \quad AB = 2\sin(\mu - \lambda)$$

Ensuite, AED étant la bissectrice de l'angle BAC, on a

$$BE = AB \frac{\sin \frac{1}{2}(\pi + \lambda - 2\mu)}{\sin\left(\mu + \frac{\pi + \lambda - 2\mu}{2}\right)} = 2 \sin(\lambda - \mu) \frac{\cos\left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}},$$

$$CE = 2 \sin \mu \frac{\cos\left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}};$$

et ensuite

$$AE = 2 \sin \mu \frac{\sin(\mu - \lambda)}{\cos \frac{\lambda}{2}}.$$

En nommant Y l'ordonnée du petit cercle pour le point E,

$$Y^2 = BE.CE,$$

donc

$$Y = 2 \frac{\cos\left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} \sqrt{\sin \mu . \sin(\mu - \lambda)}.$$

La génératrice projetée sur AE coupe les droites projetées en G, E, de manière que

$$\frac{Y}{a} = \frac{AE}{AG};$$

ce qui donne

$$a = \frac{\cos\left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{\sin \mu . \sin(\mu - \lambda)}}.$$

On a

$$\sin \mu . \sin(\mu - \lambda) = \frac{\cos \lambda - \cos(2\mu - \lambda)}{2}.$$

$$\cos\left(\mu - \frac{\lambda}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\mu - \lambda)}{2}}:$$

donc

$$a = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\mu - \gamma)}{\cos\gamma - \cos(2\mu - \gamma)}} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{\cos\gamma - \cos A}},$$

ou

$$a = \sqrt{\frac{1-\delta}{\gamma-\delta}};$$

et

$$b = FG = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}},$$

ou

$$b = \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}}.$$

Dans la première Note, nous avions pour le carré du module :

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}.$$

En remplaçant a et b par les valeurs qui précèdent, on trouve

$$c^2 = \frac{1-\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1-\gamma}{1-\gamma}.$$

Cette valeur est précisément celle que nous avons employée ci-dessus.

Si nous prenons encore

$$\sin^2 \theta' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1 + a^2}{1 - b^2},$$

nous trouverons

$$\sin \theta' = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}, \quad \cos \theta' = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

A l'aide de ces différentes valeurs, et en employant la formule trouvée dans la Note dont il s'agit, on trouve, pour la mesure de

l'angle conique,

$$A = 4\left[E_1(c)F(c',\theta')+F_1(c)E(c',\theta')-F_1(c)F(c',\theta')-\frac{\gamma+\delta}{\sqrt{(1+\delta)(1+\gamma)}}F_1(c)\right].$$

Dans cette formule, c' représente le module complémentaire.

Nous avons trouvé ci-dessus, en posant

$$\sin\mu = \sqrt{\frac{1+\delta}{2}},$$

$$\cos\mu = \sqrt{\frac{1-\delta}{2}}:$$

$$A = 2\pi + 4\left[F_1(c)F(c',\mu) - F_1(c)E(c',\mu) - E_1(c)F(c',\mu)\right].$$

On pourrait vérifier l'identité de ces valeurs en partant des relations qui existent entre les fonctions de même module; mais cette recherche étant longue et peu utile, je ne m'y arrêterai pas.

Dans la première solution, nous avons dit qu'en supposant $\gamma = 1$, on trouve

$$4\int_0^{\theta_1} d\theta\sqrt{\frac{\cos 2\theta-\delta}{\cos 2\theta+\gamma}} = 2\pi\left(1-\sqrt{\frac{1+\delta}{2}}\right).$$

Nous allons développer le calcul, qui nous conduira à l'évaluation d'une partie remarquable de la surface sphérique.

Désignons par B l'intégrale prise de o à θ; nous aurons d'abord, en remplaçant δ par $2\sin^2\mu - 1$,

$$B = \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\cos\theta}\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\mu}.$$

Posons

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{y^2+\sin^2\mu}{y^2+1}};$$

nous aurons

$$\sin\theta = \frac{\cos\mu}{\sqrt{y^2+1}}, \quad d\theta = -\cos\mu \frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{y^2+\sin^2\mu}};$$

$$\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\mu} = \frac{y\cos\mu}{\sqrt{y^2+1}}.$$

D'ailleurs $\theta = 0$ donne $y = \infty$; donc

$$B = \cos^2\mu \int_y^\infty \frac{y^2\,dy}{(y^2+1)(y^2+\sin^2\mu)}.$$

On a identiquement

$$\frac{y^2}{(y^2+1)(y^2+\sin^2\mu)} = \frac{1}{y^2+\sin^2\mu} - \frac{1}{(y^2+1)(y^2+\sin^2\mu)}$$

$$= \frac{1}{y^2+\sin^2\mu} - \frac{1}{\cos^2\mu}\left(\frac{1}{y^2+\sin^2\mu} - \frac{1}{y^2+1}\right).$$

Donc

$$B = \int_y^\infty \frac{dy}{y^2+1} - \sin^2\mu \int_y^\infty \frac{dy}{y^2+\sin^2\mu};$$

ce qui donne immédiatement

$$B = (1-\sin\mu)\frac{\pi}{2} + \sin\mu.\,\text{arc tang}\frac{y}{\sin\mu} - \text{arc tang}\,y.$$

On a

$$y = \sqrt{\frac{\cos^2\theta - \sin^2\mu}{\sin^2\theta}}.$$

donc

$$\text{arc tang}\,y = \text{arc tang}\sqrt{\frac{\cos^2\theta - \sin^2\mu}{\sin^2\theta}}.$$

Si la tangente est

$$\sqrt{\frac{\cos^2\theta - \sin^2\mu}{\sin^2\theta}}.$$

le cosinus sera

$$\frac{\sin \theta}{\cos \mu}.$$

De même pour le second arc, la tangente étant

$$\frac{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \mu}}{\sin \theta . \sin \mu},$$

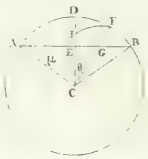
le cosinus sera

$$\frac{\sin \theta \sin \mu}{\cos \theta \cos \mu}.$$

La formule précédente devient donc

$$B = (1 - \sin \mu) \frac{\pi}{2} + \sin \mu \operatorname{arc} \left(\cos = \operatorname{tang} \theta \operatorname{tang} \mu\right) - \operatorname{arc} \left(\cos = \frac{\sin \theta}{\cos \mu}\right).$$

Considérons une sphère dont le rayon est pris pour unité.



Soit AB la projection d'un petit cercle, et soient CD, CF les traces de deux plans passant par le diamètre perpendiculaire à la figure, CD étant perpendiculaire à AB.

D'après ce que nous avons vu dans la première solution, si l'on suppose

$$CAE = \mu \quad \text{et} \quad DCF = \theta,$$

l'intégrale B représente l'aire de la portion de la sphere projetée suivant DEGF. Cette portion se compose du triangle birectangle projeté sur CDF, et formé par trois arcs de grands cercles, diminué du triangle rectangle projeté sur CEG, et formé de deux grands arcs et d'un petit. J'ignore si cette évalution avait déjà été faite.

Du point F comme pôle, avec un rayon sphérique $= AD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, traçons un arc de petit cercle; il rencontrera l'arc de grand cercle projeté sur CD en un point I. Si alors nous traçons l'arc de grand cercle IF, nous aurons dans l'espace un triangle sphérique IFD, rectangle en D. Représentons par F et I les angles aigus de ce triangle. Les formules de la trigonométrie sphérique donnent

$$\cos F = \operatorname{tang} DF \cot IF = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \mu,$$

$$\sin DF = \sin I . \sin IF,$$

d'où

$$\sin I = \frac{\sin \delta}{\cos \mu}.$$

Alors la formule précédente devient

$$B = (1 - \sin \mu) \frac{\pi}{2} + F \sin \mu - \left(\frac{\pi}{2} - I\right).$$

ou

$$B = I - \sin \mu \left(\frac{\pi}{2} - F\right);$$

et comme l'aire du triangle DIF serait exprimée par $I - \left(\frac{\pi}{2} - F\right)$, il s'ensuit qu'en la représentant par T, l'on a

$$B - T = (1 - \sin \mu) \left(\frac{\pi}{2} - F\right);$$

ce qui est assez simple.

II.

Problème. Déterminer le volume de la partie commune à un ellipsoïde et à une sphère concentriques?

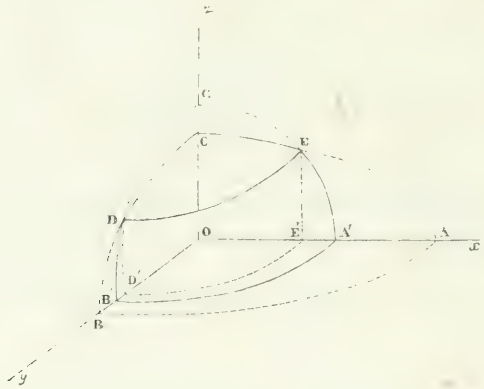
Prenons pour axes des coordonnées, les axes principaux de l'ellipsoïde : les équations des deux surfaces seront

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La sphère et l'ellipsoïde peuvent se couper de deux manières : ou bien l'ellipsoïde a quatre sommets extérieurs à la sphère, ou bien il n'en a que deux. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$a > b > c,$$

le premier cas se présentera lorsque R sera compris entre b et c; et le second, lorsque R sera compris entre a et b. Je vais développer les calculs relatifs à la première hypothèse.



Soit OABC la portion de l'ellipsoïde déterminée par les parties positives des trois plans coordonnés, et soit OA'B'C' la portion correspondante de la sphère.

Les deux surfaces se coupent suivant une ligne DE, ayant pour

projection sur le plan des xy la courbe D′E′. Il s'agit de trouver l'expression du volume limité par les trois plans coordonnés, la portion CDE de surface ellipsoïdale, et la partie B′DEA′ de surface sphérique.

Soit V ce volume, et soit v le volume C′DEC : nous aurons d'abord

$$V = \frac{1}{6}\pi R^3 - v. \tag{2}$$

En second lieu, si z' et z'' représentent respectivement l'ordonnée de la surface sphérique et celle de la surface ellipsoïdale, répondant à un même système de valeurs de x et y, nous avons

$$v = \int\int (z' - z'')\,dx\,dy,$$

ou

$$v = \int\int \left[\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right] dx\,dy. \tag{3}$$

L'intégration doit être étendue à tout l'espace OD′E′.

L'élimination de z entre les équations (1) donne, pour équation de D′E′ :

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = R^2 - c^2. \tag{4}$$

Afin d'intégrer $z'dxdy$, je pose

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

ce qui donne

$$z'dxdy = \rho\,d\rho\,d\omega\sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

En même temps, l'équation (4) devient

$$(5)\qquad \rho' = ab\sqrt{\frac{R^2 - c^2}{a^2 b^2 - c^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}}.$$

De même, dans $z''dx\,dy$, je pose

$$\frac{x}{a} = \rho\cos\omega, \quad \frac{y}{b} = \rho\sin\omega:$$

d'où

$$z''dx\,dy = abc\,\rho\,d\rho\,d\omega\sqrt{1 - \rho^2}.$$

L'équation (4) donne, par le même changement de variables,

$$(6)\qquad \rho'' = \sqrt{\frac{R^2 - c^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - c^2}}$$

Au moyen de cette double transformation, la formule (3) devient

$$(7)\qquad v = \iint \rho\,d\rho\,d\omega\sqrt{R^2 - \rho^2} - abc\iint \rho\,d\rho\,d\omega\sqrt{1 - \rho^2}.$$

Dans la première intégrale, on devra intégrer par rapport à ρ, de $\rho = 0$ à $\rho = \rho'$, et par rapport à ω, de 0 à $\frac{\pi}{2}$; dans la seconde, les limites de ρ seront 0 et ρ'', et celles de ω, 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On trouve immédiatement

$$\int_0^{\rho'} \rho\,d\rho\sqrt{R^2 - \rho^2} = \tfrac{1}{3}R^3 - \tfrac{1}{3}c^3\left[\frac{a^2 b^2 - R^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}{a^2 b^2 - c^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int_0^{\rho''} \rho\,d\rho\sqrt{1 - \rho^2} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\left[\frac{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - R^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - c^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

La formule (7) se change maintenant en celle-ci :

$$(8)\qquad v = \tfrac{1}{6}\pi(R^3 - abc) - \tfrac{1}{3}c^3 A + \tfrac{1}{3}abc\,B;$$

en posant

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{a^2 b^2 - R^2 (b^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega)}{a^2 b^2 - c^2 (b^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega - R^2}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega - c^2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

ou

$$(9) \quad \begin{cases} A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{b^2 (a^2 - R^2) + a^2 (b^2 - R^2) \tang^2 \omega}{b^2 (a^2 - c^2) + a^2 (b^2 - c^2) \tang^2 \omega}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{(a^2 - R^2) + (b^2 - R^2) \tang^2 \omega}{(a^2 - c^2) + (b^2 - c^2) \tang^2 \omega}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Nous allons ramener ces deux intégrales aux fonctions elliptiques.

Pour opérer cette réduction, je pose, dans A, $\tang \omega = p \tang \theta$, p étant une indéterminée.

Cette transformation donne

$$\frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = p \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

ou

$$d\omega = p \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta},$$

et

$$dA = p \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{b^2 (a^2 - R^2) + a^2 p^2 (b^2 - R^2) \tang^2 \theta}{b^2 (a^2 - c^2) + a^2 p^2 (b^2 - c^2) \tang^2 \theta}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Je dispose de p, de manière que

$$b^2 (a^2 - R^2) = a^2 p^2 (b^2 - R^2);$$

ce qui donne

$$A = p b^3 (a^2 - R^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta)(b^2 (a^2 - c^2) \cos^2 \theta + a^2 p^2 (b^2 - c^2) \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

Par le changement de θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$, cette expression devient d'abord

$$A = pb^3(a^2 - R^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[p^2 - (p^2 - 1)\sin^2\theta][a^2p^2(b^2 - c^2) - (a^2p^2b^2 - a^2p^2c^2 - a^2b^2 + b^2c^2)\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

D'après la valeur de p^2, on a

$$a^2p^2(b^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) = \frac{b^2}{b^2 - R^2}[(a^2 - R^2)(b^2 - c^2) - (a^2 - c^2)(b^2 - R^2)]$$

$$= \frac{b^2}{b^2 - R^2}(a^2 - b^2)(R^2 - c^2),$$

$$a^2p^2(b^2 - c^2) = \frac{b^2(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)}{(b^2 - R^2)}, \quad p^2 - 1 = \frac{R^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - R^2)};$$

donc

$$A =$$

$$pa^2(a^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}(b^2 - R^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[b^2(a^2 - R^2) - R^2(a^2 - b^2)\sin^2\theta][(a^2 - R^2)(b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)(R^2 - c^2)\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

En remplaçant p par sa valeur

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - R^2}{b^2 - R^2}},$$

et posant, pour abréger,

$$(10) \qquad e^2 = \frac{(a^2 - b^2)(R^2 - c^2)}{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)}, \quad \beta^2 = \frac{R^2(b^2 - c^2)}{b^2(R^2 - c^2)},$$

on réduit la formule précédente à

$$(11) \qquad A = \frac{a}{b}\frac{(b^2 - R^2)^2}{(a^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des calculs de même nature, exécutés sur la seconde formule (9), conduisent à

$$(12) \qquad B = \frac{(b^2 - R^2)^2}{(a^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \beta'^2 e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

en prenant

$$(13)\qquad \beta^2 e^2 = \frac{b^2 - R^2 e^2}{R^2 - e^2}.$$

Substituant ces valeurs de A et B dans la formule (8), j'obtiens

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \tfrac{4}{3}\pi . R^3 - abc \\ &+ \frac{4ac}{3b}\frac{b^2 - R^2 e^2}{(a^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - e^2)^{\frac{1}{2}}}\left[b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\delta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}} - e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\delta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}}\right]\end{aligned}\right.$$

On a identiquement

$$\frac{1}{(1 - e^2 x)(1 - \beta^2 e^2 x)} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\frac{1}{1 - \beta^2 e^2 x} - \frac{1}{\beta^2 - 1}\frac{1}{1 - e^2 x};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\delta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\delta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}}$$

$$- \frac{1}{\beta^2 - 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - e^2 \sin^2\delta)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a encore identiquement :

$$d\frac{\sin\delta\cos\delta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}} = -\frac{1 - e^2}{e^2}\frac{d\delta}{(1 - e^2 \sin^2\delta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{e^2}d\delta\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - e^2 \sin^2\delta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta};$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\delta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\delta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\delta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}}$$

$$- \frac{1}{(\beta^2 - 1)(1 - e^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta\sqrt{1 - e^2 \sin^2\delta}$$

Les formules (10) donnent facilement

$$\beta^2 - 1 = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{b^2 - R^2}{R^2 - c^2}, \quad \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = \frac{R^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - R^2)}, \quad 1 - e^2 = \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - R^2)}{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)};$$

l'équation précédente devient donc, en employant les notations de Legendre :

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{R^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - R^2)}\,\Pi_1(-\beta^2 e^2, e) \\ &\quad - \frac{b^2(b^2 - c^2)(a^2 - R^2)(R^2 - c^2)}{c^2(a^2 - c^2)(b^2 - R^2)^2}\,E_1(e). \end{aligned} \right.$$

On trouve de la même manière

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \beta'^2 e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{b^2 - c^2}{b^2 - R^2}\,\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e) \\ &\quad - \frac{(b^2 - c^2)(a^2 - R^2)(R^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - R^2)^2}\,E_1(e) \end{aligned} \right.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (14) donne ensuite

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} v &= \frac{1}{6}\pi(R^3 - abc) \\ &\quad + \frac{1}{3}\frac{ac}{b}\frac{b^2 - R^2}{\sqrt{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)}}\left[b^2\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e) - R^2\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e)\right]. \end{aligned} \right.$$

Enfin, introduisant cette nouvelle valeur dans l'équation (2), et multipliant le résultat par 8, on obtient définitivement, pour le volume commun à l'ellipsoïde et à la sphère,

$$8V =$$

$$\frac{4}{3}\pi abc - \frac{8}{3}\frac{ac}{b}\frac{b^2 - R^2}{\sqrt{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)}}\left[b^2\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e) - R^2\Pi_1(-\beta^2 e^2, e)\right].$$

On voit donc que l'évaluation de ce volume dépend de deux fonctions elliptiques complètes de troisième espèce. Ces fonctions ont pour mo-

dule commun

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - R^2}\frac{(R^2 - c^2)}{b^2 - c^2}},$$

et leurs paramètres sont respectivement

$$-\beta'^2 e^2 = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 - R^2}, \quad -\beta^2 e^2 = -\frac{R^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - R^2)}.$$

Une fonction complete de troisième espece peut s'exprimer par des fonctions de première et de seconde espèce; la dernière formule peut donc aussi être écrite d'une autre manière, mais alors elle moins simple.

Cette formule convient au cas où l'on suppose

$$a > b > R > c.$$

Admettons maintenant que l'on ait

$$a > R > b > c.$$

Voici une considération qui permettra d'arriver au nouveau résultat sans que l'on soit obligé de refaire le calcul.

Je pose, dans les équations (1),

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz',$$
$$\frac{R}{a} = c', \quad \frac{R}{b} = b', \quad \frac{R}{c} = a';$$

ce qui donne

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad \left(\frac{x'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a'}\right)^2 = 1.$$

En même temps nous aurons

$$c' < 1, \quad b' > 1, \quad a' > 1, \quad c' < b' < a',$$

ou

$$a' > b' > 1 > c'$$

On voit donc que ces équations représentent une sphère et un el-

lipsoïde ayant entre eux la même relation que les surfaces considérées plus haut. Si donc on veut obtenir le volume de la partie commune à cette sphère et à cet ellipsoïde, il suffira d'employer la valeur de 8V en y faisant

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad R = 1;$$

ou plutôt en prenant.

$$a = \frac{R}{c}, \quad b = \frac{R}{b}, \quad c = \frac{R}{a}, \quad R = 1.$$

On obtient ainsi, en multipliant le résultat par abc, attendu que $dx.\,dy.\,dz = abc.\,dx'.\,dy'.\,dz'$:

$$8V =$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8}{3}\frac{ac}{b}\frac{R^2 - b^2}{\sqrt{(R^2 - c^2)(a^2 - b^2)}}\left[R^2 H_1(-\gamma'^2 f'^2, f) - b^2 H_1(-\gamma^2 f^2, f)\right]$$

Dans cette formule

$$f'^2 = \frac{b^2 - c^2}{R^2 - c^2}\cdot\frac{a^2 - R^2}{a^2 - b^2}, \quad \gamma'^2 f'^2 = \frac{R^2(b^2 - c^2)}{b^2(R^2 - c^2)}, \quad \gamma^2 f^2 = \frac{b^2 - c^2}{R^2 - c^2}.$$

EXTRAIT

D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

PAR M. ABEL TRANSON.

.... Je réunis ici quelques réflexions, 1° sur les courbes qui sont à elles-mêmes leurs propres caustiques et sur les surfaces qui sont à elles-mêmes une de leurs deux nappes focales, par analogie avec ce que M. Binet a donné dans le numéro de février dernier, sur la courbe qui est à elle-même sa propre développée et sur les surfaces qui sont à elles-mêmes une de leurs deux nappes de courbure; 2° sur une conséquence curieuse de la relation que M. Biot a établie entre deux distances zénithales réciproques.

I.

Je ferai remarquer premièrement que, non-seulement la *développée* d'une spirale logarithmique, mais aussi toute *développoïde* d'une telle spirale, est une autre spirale logarithmique de même angle et de même pôle que la proposée. De sorte que α étant l'angle que fait, dans la proposée, le rayon vecteur avec la normale, et par conséquent l'équation de la proposée étant

$$\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha},$$

l'équation de la développoïde relative à l'angle δ, sera

$$\rho' = \frac{\sin \alpha + \delta}{\cos \alpha} e^{\left(\omega + \delta - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tang} \alpha} :$$

les angles ω' et ω étant comptés depuis la même origine. La circonstance $\delta = 0$ répond à la développée; mais si δ est supposé quelconque, l'équation ci-dessus peut être considérée comme celle de la caustique des rayons lumineux qui étant issus du pôle, auront été rompus à la rencontre de la spirale suivant une loi propre à procurer l'angle de réfraction δ quand celui d'incidence est α.

Il faut observer de plus que des rayons comme MP, M'P', ..., issus sous un même angle δ des divers points d'une spirale logarithmique dont le pôle est O, rencontreront les spires de la courbe en des points P, P', ... tels que les angles ξ, ξ', ... avec les rayons vecteurs OP, OP', ... (et, par suite, les angles avec les normales en ces points) seront constants; de sorte que, si ces rayons MP, M'P', ... éprouvent, aux points de rencontre P, P', ..., de nouvelles réflexions ou réfractions, ils auront pour enveloppes de nouvelles développoïdes de la proposée, c'est-à-dire toujours des spirales logarithmiques de même pôle et de même angle.

Pour s'assurer de cette constance des angles ξ, ξ', ..., il suffit de remarquer que, dans le triangle OPM, on a la proportion

$$\mathrm{OP} : \mathrm{OM} :: \sin(\alpha + \delta) : \sin\xi,$$

c'est-à-dire en mettant pour les rayons vecteurs leurs valeurs respectives

$$e^{(\omega + \varepsilon + n\pi)\tang\alpha} : e^{\omega\tang\alpha},$$

ou encore

$$e^{(\varepsilon - n\pi)\tang\alpha} : 1 :: \sin(\alpha + \delta) : \sin\xi,$$

appelant ici ε l'angle en O du triangle OMP, et n le nombre de spires ou révolutions autour du pôle qu'il faut faire sur la courbe pour passer de M en P; nombre positif ou négatif selon que le point P est sur une spire extérieure ou intérieure à celle qui porte le point M. Enfin comme on a, entre les angles ε, α, δ et ξ, cette seconde relation

$$\alpha + \delta + \varepsilon + \xi = \pi,$$

il est manifeste que les angles ε et ξ sont constants quelque part que soit

le point M, pourvu que l'angle δ et le nombre entier n demeurent les mêmes.

La propriété bien connue de la spirale logarithmique relativement à sa caustique ordinaire reçoit donc cette extension remarquable que, si des rayons issus du pôle ont subi sur la courbe un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, leur caustique sera toujours une spirale logarithmique de même angle et de même pôle que la proposée; résultat qui subsiste quand même les lois de réflexion et de réfraction seraient autres que les lois naturelles, et quand même ces lois changeraient à chaque rencontre nouvelle; enfin quel que soit le nombre des spires qui sépareraient deux rencontres successives... Toujours, en un mot, la caustique d'un ordre quelconque sera la spirale primitive qui aura seulement éprouvé autour de son pôle une certaine rotation.

D'ailleurs la quantité de cette rotation, par rapport à une caustique de nature et d'ordre déterminés, dépendant essentiellement de l'angle α qui caractérise la spirale primitive; s'il arrive que cette rotation soit d'un nombre entier de circonférences, la spirale proposée sera donc à elle-même sa caustique de la nature et de l'ordre en question. Cette circonstance dépend d'une équation transcendante entre l'angle de la spirale et le nombre de tours que cette courbe est censée faire sur elle-même pour produire sa caustique, nombre qui demeure indéterminé dans la question ; de sorte qu'il y a, non pas une seule spirale, mais toute une classe de spirales logarithmiques qui sont à elles-mêmes leurs caustiques d'un ordre déterminé.

Supposons, par exemple, qu'on veuille déterminer la classe des spirales logarithmiques qui sont à elles-mêmes leurs caustiques du premier ordre par réflexion. Une telle caustique est une développoïde dans laquelle l'angle δ est égal à celui qui caractérise la spirale et que nous avons appelé α; son équation sera donc

$$z' = \rho \sin \alpha e^{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tang \alpha};$$

et pour que cette nouvelle courbe coïncide avec la proposée à laquelle

on aura fait accomplir un nombre entier n de révolutions sur elle-même, il faudra poser

$$2\sin\alpha\, e^{\left(\omega'+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tang}\alpha} = e^{(\omega'+2n\pi)\operatorname{tang}\alpha},$$

c'est-à-dire

$$2\sin\alpha = e^{\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi-\alpha\right]\operatorname{tang}\alpha},$$

équation qui détermine la valeur de α. D'ailleurs, comme α est toujours moindre que $\frac{1}{2}\pi$, on démontre facilement, en développant le second membre, que cette équation ne peut pas subsister à moins que n soit négatif, c'est-à-dire que le point de la caustique relatif au point d'une spire quelconque ne peut être que sur quelqu'une des spires intérieures; ce qui est conforme à la nature de la courbe.

Pour étendre cette propriété aux surfaces, il faut rappeler que si un centre envoie des rayons lumineux sur une surface, tout rayon réfléchi ou réfracté (selon une loi quelconque) sera rencontré seulement par deux des rayons infiniment voisins; ce qui donne lieu, sur chaque rayon réfléchi ou réfracté, à deux foyers seulement; et, par suite, pour l'ensemble de tous les rayons réfléchis ou réfractés, à deux nappes focales. Pour les rayons qui auront subi deux rencontres il y aura deux nouvelles nappes focales, et ainsi de suite à l'infini.

Maintenant, si l'on fait pivoter sur son pôle, comme point fixe, le plan d'une des spirales qui sont à elles-mêmes leurs caustiques d'un ordre déterminé, ce plan roulant d'ailleurs sur une surface quelconque; cette spirale engendrera une surface qui sera à elle-même, par rapport au point fixe considéré comme centre rayonnant, l'une des deux nappes focales de ce même ordre. L'autre nappe focale sera le cône décrit par le plan même de la spirale dans son mouvement.

Ce résultat tient à ce fait plus général que si, considérant une courbe plane, on construit par rapport à un point quelconque de son plan toutes les caustiques successives à l'infini (par réflexion ou réfraction), la surface qui sera engendrée par cette courbe, lorsqu'on fera pivoter son plan sur le point rayonnant, aura, pour l'une de ses deux nappes

focales d'un ordre quelconque, la surface engendrée par la caustique de ce même ordre; et l'autre nappe focale de ce même ordre, quel qu'il soit, sera toujours le cône qui enveloppe les diverses positions du plan mobile. Ce cône jouit de la propriété singulière d'être à la fois, par rapport à la surface ainsi engendrée, un lieu de rencontre des normales infiniment voisines, et aussi un lieu de rencontre de tous les rayons infiniment voisins qui, étant issus du point fixe, ont subi sur cette même surface un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions.

II.

Si de deux stations M et M_1 on a observé au même instant les distances zénithales réciproques z et z_1, c'est-à-dire si z est l'angle que fait, avec la verticale de la première station, le rayon visuel dirigé vers la seconde; et z_1 la quantité analogue mesurée simultanément dans la seconde station, si r et r_1 sont les distances de chaque lieu au centre de la terre ou plus exactement au centre de la sphère qui est osculatrice entre les deux stations réciproquement visibles, de sorte que $r_1 - r$ soit la différence de niveau entre ces stations; ρ et ρ_1 étant les densités actuelles de l'air aux points M et M_1, et k le coefficient connu qui mesure le pouvoir réfringent de l'air atmosphérique à la température 0° et à la pression $0^m,76$; ces diverses quantités ont entre elles la relation très-simple

$$A \ldots r \sin z \sqrt{1 + 4k\rho} = r_1 \sin z_1 \sqrt{1 + 4k\rho_1}.$$

que M. Biot établit par cette simple considération que « l'arc (de la » trajectoire) MM_1 étant parcouru par l'élément lumineux en vertu » d'une force centrale, les perpendiculaires menées du centre C (de la » sphère osculatrice) sur les deux tangentes sont réciproques aux vi- » tesses qui ont lieu aux points de tangence, conformément à la loi » des aires qui a lieu dans un tel mouvement. Or ces perpendiculaires » sont ici exprimées par $r_1 \sin z_1$ et $r \sin z$; et les vitesses qui y corres-

» pondent sont $\sqrt{1+4k\rho_1}$, et $\sqrt{1+4k\rho}\ldots$ » (*Additions à la Connaissance des Temps*, 1842.)

Cette formule remarquable suppose seulement que les couches d'égal pouvoir réfringent sont sphériques; mais à cela près elle subsiste quelle que soit la succession des densités dans la hauteur qui sépare les deux stations; et il en résulte, au moins en théorie, « un moyen d'assigner » rigoureusement les différences de niveau de deux points dont les » distances zénithales réciproques ont été observées simultanément. » (*Ibid.*) Mais, dans la pratique, cette même formule exige plusieurs restrictions importantes, parce qu'elle a « l'inconvénient de prendre le » rayon terrestre pour unique élément linéaire, ce qui donne une très- » grande influence à la configuration accidentelle des couches d'égal » pouvoir réfringent que la théorie suppose sphériques, ainsi qu'aux » erreurs que l'on peut commettre dans la mesure des distances zéni- » thales, et dans l'appréciation des densités de l'air aux points ex- » trêmes de la trajectoire lumineuse; erreurs dont l'effet combiné de- » vient surtout excessif quand l'angle compris entre les verticales des » deux stations est fort petit.... » (*Ibid.*) M. Biot parvient à restreindre l'influence de ces diverses erreurs en supposant connu l'angle compris, au centre de la sphère osculatrice, entre les verticales des deux points visibles l'un de l'autre. Ce que je veux faire remarquer ici, c'est que la propriété des trajectoires lumineuses exprimées par l'équation (A) est susceptible d'une autre forme dans laquelle, non-seulement tout élément linéaire, mais même les circonstances atmosphériques de chaque station, ont entièrement disparu. Il suffit pour cela de concevoir une troisième station M_3 qui soit visible des points M_1 et M_2; et supposer qu'on ait au même instant mesuré, en chacun de ces trois points, les distances zénithales des deux autres, en tout *six distances*. Pour la symétrie des formules, je distinguerai les distances observées en chaque point par les lettres Z et ζ; j'affecterai les majuscules romaines aux distances qu'on observerait en parcourant le triangle $M_1 M_2 M_3$ dans un sens, et les lettres grecques à celles qu'on obtiendrait en le parcourant de suite en sens inverse. Alors l'équation, marquée ci-dessus (A), prendra la forme

$$1 \ldots r_1 \sin Z_1 \sqrt{1+4k\rho_1} = r_2 \sin \zeta_2 \sqrt{1+4k\rho_2},$$

et aura lieu conjointement avec les suivantes

$$2) \ldots r_2 \sin Z_2 \sqrt{1 + 4k\rho_2} = r_3 \sin \zeta_3 \sqrt{1 + 4k\rho_3},$$

$$3) \ldots r_3 \sin Z_3 \sqrt{1 + 4k\rho_3} = r_1 \sin \zeta_1 \sqrt{1 + 4k\rho_1};$$

de sorte que par leur mutuelle combinaison on obtient la relation

$$4) \ldots \sin Z_1 \sin Z_2 \sin Z_3 = \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3,$$

qui est, comme on voit, indépendante de toute circonstance atmosphérique et identiquement la même qu'on observerait dans un milieu homogène où les trajectoires lumineuses seraient des lignes droites.

Cette relation (4) ne peut pas à la vérité servir directement à mesurer les différences de niveau; mais, son avantage est d'être à l'abri des causes d'erreurs signalées par M. Biot dans sa formule fondamentale (A). Elle offrira donc un moyen facile de vérifier l'hypothèse des couches concentriques quand cette hypothèse sera douteuse; ou bien, lorsqu'on admettra cette forme pour les couches atmosphériques, on trouvera dans la relation (4) un moyen de répartir, entre les six distances zénithales du triangle $M_1 M_2 M_3$, les petites erreurs de l'observation; moyen en quelque sorte analogue à ceux qu'on possède pour redresser les erreurs commises dans la mesure des trois angles d'un triangle plan ou géodésique.

SUR

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR J. LIOUVILLE.

En prenant y pour variable indépendante et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ ou p pour inconnue, on abaisse, comme on sait, d'une unité l'ordre de toute équation différentielle de la forme

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Peut-être est-il bon d'ajouter, dans l'intérêt des élèves, que si $\varphi(y, d, d^2, \ldots, d^n)$ est une fonction homogène de d, l'équation transformée sera homogène par rapport à p, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^2p}{dy^2}$, etc., en sorte que l'ordre de cette équation elle-même s'abaissera encore d'une unité en posant

$$p = e^{\int t dy}.$$

Cela résulte de ce que les seconds membres des formules

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \ldots,$$

sont homogènes et respectivement du premier, du second, du troisième ordre, ..., par rapport à p et ses dérivées.

RECHERCHES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS

ET

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ QUI N'ADMET QUE DES SOLUTIONS ENTIÈRES;

Par M. J. BINET.

Professeur au Collège de France, ancien Inspecteur de l'École Polytechnique.

On trouvera dans la première partie de ce Mémoire quelques considérations sur les résidus des nombres, qui ont conduit à un procédé pour parvenir au plus grand diviseur de deux nombres entiers, que l'on croit nouveau. La marche de cette méthode permet de l'appliquer à la recherche du polynome qui divise à la fois deux polynomes donnés et que l'on nomme leur plus grand diviseur. Il n'était guère probable que, pour les nombres entiers, on pût rencontrer une méthode plus simple que le procédé que nous a transmis Euclide : nous devons reconnaître que la nouvelle méthode n'accroît pas ordinairement la facilité des opérations arithmétiques, et il en serait ainsi pour l'algèbre; mais elle conduit à des relations d'une simplicité digne de remarque, et qui peuvent être utiles. Elles m'ont fourni un théorème sur les nombres premiers qui n'a, peut-être, pas été remarqué.

Dans la seconde partie du Mémoire, on applique les diverses relations antérieurement obtenues à la résolution, en nombres entiers, de l'équation

$$ax - Ay = 1,$$

A et a étant des entiers donnés. Il en résulte un mode de solution

arithmétique, distinct de celui que l'on pratique ordinairement et qui fut donné en 1613 par Bachet de Méziriac. En ramenant cette méthode à l'algorithme régulier tiré des fractions continues, Lagrange observe qu'elle conserve, au fond, le même principe, et il ajoute « qu'il en est ainsi de toutes celles imaginées depuis Bachet. » (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1768.)

J'ai publié en 1827 une méthode, à laquelle M. Libri était parvenu de son côté, et qui est fondée sur un principe différent de celui de Bachet : c'est le théorème de Fermat sur le résidu d'un entier, élevé à une puissance marquée par un nombre premier, qui fournit cette solution de la congruence du premier degré. (*Voyez* les Mémoires de M. Libri, et le *Journal de l'École Polytechnique*, XXe cahier.) En employant un théorème d'Euler qui comprend celui de Fermat, M. Poinsot a donné à la solution une expression plus élégante, et plus simple à quelques égards, que la nôtre; et c'est à des considérations analogues que se rattachent de nouvelles recherches de M. Cauchy sur le même objet. (Voy. les *Nouveaux Exercices d'Analyse*, par M. Cauchy, tome II, 1841.) Ces diverses méthodes, curieuses sous le point de vue théorique, se prêtent péniblement au calcul arithmétique, lorsque les coefficients de l'équation donnée sont un peu grands : la méthode de Bachet conserve en ce cas tout l'avantage, et elle est véritablement alors la seule praticable. Celle que nous publions en ce moment nous paraît entraîner habituellement des calculs de même étendue, à peu près; dans quelques circonstances cependant elle est d'un emploi plus simple : c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque l'un des coefficients de l'équation est un nombre premier. Ce cas, auquel on peut ramener tous les autres, présente des facilités particulières dont la méthode de Bachet ne peut profiter.

Quoi qu'il en soit, les amateurs d'arithmétique verront peut-être avec intérêt le nouveau procédé qui leur est offert pour traiter la congruence du premier degré : on sait que cette congruence est la base de théories importantes dans la science des nombres entiers.

PREMIÈRE PARTIE.

[1]. Nous désignerons par A et a deux nombres entiers inégaux, et nous supposerons $A > a$; on pourra opérer la division de A par le diviseur a; soit p le quotient et a_1 le reste de la division. Le dividende A étant égal au produit ap ajouté au résidu a_1, on aura cette équation, provenant de la division exécutée,

$$A = ap + a_1 :$$

l'opération ayant été faite selon le mode habituel de l'arithmétique, fournira un reste a_1 positif et moindre que le diviseur a. Mais si l'on accroît le quotient p d'une unité, le produit $a(p+1)$ sera supérieur au dividende A, et l'équation de la division pourra être ainsi écrite

$$A = a(p+1) - a + a_1 = a(p+1) - (a - a_1) :$$

puisque a est $> a_1$ la différence $a - a_1$ est positive, et $-(a - a_1)$ est un résidu négatif qui résulte de la division où l'on admettrait un quotient $p + 1$, supérieur d'une unité au quotient p, qui est en usage dans l'arithmétique ordinaire. Lagrange nomme division *en dedans* l'opération usuelle qui exige un reste positif a_1; et il désigne par division *en dehors*, ou en excès, celle qui introduit un reste négatif. Dans les deux cas, le reste est de valeur numérique moindre que le diviseur; et l'on voit que si une division a été exécutée en dedans, puis exécutée en dehors, les résidus a_1 et $a - a_1$ seront tels que leur somme $a_1 + \overline{a - a_1}$ composera le diviseur. Il s'ensuit que si a_1 est $> \frac{1}{2}a$, le résidu de la division en dehors, $a - a_1$, sera $< \frac{1}{2}a$, et réciproquement. En employant le quotient p, ou le quotient $p + 1$, on peut donc amener le résidu, positif ou négatif, à une valeur numérique moindre que $\frac{a}{2}$.

Nous écrirons, en général, l'équation de la division sous la forme

$$A = ap \pm a_1,$$

p ayant la valeur convenable au signe admis pour le résidu dont la grandeur numérique a_1 sera toujours $< a$. D'après ce qui vient d'être dit, on poura réduire, si l'on veut, le reste a_1 à une valeur moindre que $\frac{a}{2}$, en lui donnant un signe convenable : il est souvent utile d'en user ainsi pour simplifier les calculs numériques.

Dans une seconde division de A nous allons employer le résidu a_1 comme diviseur; l'équation provenant de cette division sera

$$A = a_1 p_1 \pm a_2;$$

p_1 est le quotient et $\pm a_2$ le résidu, positif ou négatif, de l'opération : on aura d'ailleurs

$$a_2 < a_1 < a.$$

Une troisième division du même A par a_2 amènera l'équation

$$A = a_2 p_2 \pm a_3:$$

ces divisions de A pourront être continuées à l'aide des résidus subséquents a_4, $a_5, \ldots$, tant que l'on n'aura pas rencontré un reste nul parmi les nombres décroissants $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$; mais on parviendra nécessairement à une division qui se fera exactement et sans reste, après un certain nombre d'opérations : cette division sera représentée par l'équation

$$A = a_n p_n;$$

a_n sera un entier supérieur à 1, ou simplement égal à 1. Il est clair que pour arriver à cette équation l'on aura exécuté un nombre de divisions marqué par $n + 1$, et dans chacune desquelles A aura été employé comme dividende.

[II]. Si toutes les divisions ont été faites de manière à fournir le

moindre résidu, tout au plus égal à la moitié du diviseur de l'opération, on aura

$$a > 2a_1, \quad a_1 > 2a_2, \quad a_2 > 2a_3, \ldots \quad a_{n-1} > 2a_n.$$

et par conséquent

$$a > 2a_1 > 2^2a_2 > 2^3a_3 \ldots\ldots > 2^na_n;$$

il s'ensuivrait

$$2^n < \frac{a}{a_n}:$$

Si l'on prend les logarithmes tabulaires des deux membres, on aura $n \log(2) < \log(a) - \log(a_n)$, ou bien $n < \frac{\log(a) - \log(a_n)}{\log(2)}$. Mais $\log(2) = 0{,}30103\ldots$ et la fraction $\frac{1}{\log(2)} = \frac{1}{0{,}30103\ldots} < \frac{10}{3}$: par suite

$$n < \frac{10}{3}[\log(a) - \log(a_n)] < \frac{10}{3}\log(a).$$

Le plus communément le nombre des divisions sera fort au-dessous de cette limite supérieure, quand a sera un peu grand. Si, par exemple, $a = 1000$, la limite supérieure sera $\frac{10}{3} \times 3 = 10$; c'est-à-dire que pour tout nombre qui ne surpassera pas 1000, le nombre des opérations qui amèneront le dernier résidu a_n et les quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, ne peut s'élever au-dessus de 10 : généralement il sera beaucoup au-dessous de cette limite.

Il n'est pas inutile de remarquer que si l'on a été dans le cas d'effectuer un nombre considérable de divisions, le résidu a_n que l'on a en vue d'obtenir sera un petit nombre par rapport à a, et surtout quand on aura employé les moindres résidus dans toutes les divisions : pour que a_n ne fût pas une petite fraction de a, il faudrait que le nombre n des divisions fût très-petit; et encore il arrivera souvent qu'après peu de divisions, le résidu ne sera plus de quelques unités seulement, ou même l'unité.

La limite $\frac{\log a}{\log(2)}$ est aussi celle du dénombrement des divisions consécutives qu'exige la recherche du plus grand diviseur de A et a, lorsque, pour simplifier le calcul, on a soin d'admettre des résidus positifs ou négatifs, afin de n'employer que des diviseurs moindres que la moitié des dividendes correspondants, à partir de la seconde division. L'utilité de cette marche est manifeste, et je pense que l'on a dû en faire la remarque, quoique je ne la trouve dans aucun Traité. Alors les divisions seront représentées successivement par les formules

$$A = aq \pm \alpha_1, \quad a = \alpha_1 q \pm \alpha_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 q_2 \pm \alpha_3, \text{ etc.}, \quad \alpha_{n'-1} = \alpha_{n'} q_n.$$

$n' + 1$ étant le nombre des divisions; et d'après le décroissement des résidus, on aura

$$a > 2\alpha_1 > 2^2\alpha_2 > 2^3\alpha_3 \ldots > 2^n \alpha_{n'}.$$

On tire de là, comme ci-dessus,

$$n' < \frac{\log(a) - \log(\alpha_n)}{\log(2)}.$$

On sait que cette série de divisions fournit les quotients, positifs ou négatifs, dont se composerait la fraction continue représentant la fraction numérique $\frac{a}{A}$. La fraction continue ainsi composée serait, en général, moins étendue que celle dont on fait ordinairement usage, et où l'on n'emploie que des quotients positifs. Au reste, Lagrange a recommandé l'usage des quotients négatifs pour la réduction en fraction continue, dans le cas où plusieurs quotients sont égaux à l'unité. (*Voy.* ses Additions à l'*Algèbre* d'Euler, etc.)

Dans les divisions de l'article précédent, la série des quotients, que nous dénotons par p, p_1, p_2, etc., sera ascendante; plusieurs termes consécutifs p_i, p_{i+1}, ... pourraient être égaux entre eux si l'on ne se servait pas des moindres résidus; mais quand on n'admettra que des résidus au plus égaux à la moitié des diviseurs respectifs,

les quotients augmenteront rapidement, et souvent p_{i+1} sera bien supérieur à $2p_i$.

[III]. Rassemblons les équations des n divisions exécutées,

$$A = ap \pm a_1, \quad A = a_1 p_1 \pm a_2, \ldots, \quad A = a_{n-1} p_{n-1} \pm a_n, \quad (A)$$

où a_n est le dernier résidu, en sorte que $A = a_n p_n$, puisque nous admettons que cette $(n+1)^{ième}$ division s'exécute sans reste. Je désignerai par (A) ce groupe de n formules qui ont toutes A pour premier membre. J'indiquerai aussi quelquefois par le même signe (A) le système des n divisions représentées par ces formules, où les quantités $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, p, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont censées des entiers positifs, puisque l'on a affecté explicitement du signe — ceux des résidus qui sont soustractifs.

Si toutes les divisions avaient été faites en dehors, ou avec des résidus négatifs, les équations (A) seraient

$$A = ap' - a'_1, \quad A = a'_1 p_1 - a_2, \ldots, \quad A = a'_{n-1} p'_{n-1} - a'_n \quad (A)'$$

Je dénoterai pareillement par $(\overline{A})$ ce groupe d'équations; les quotients $p', p'_1, p'_2, \ldots, p'_{n-1}$ ayant été convenablement calculés, les résidus $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ seront des nombres décroissants $a > a_1 > a_2 \ldots > a_n$; mais plusieurs d'entre eux pourront être supérieurs à la moitié du résidu précédent. La forme des équations $(\overline{A})$ sera plus simple à traiter, et elle conduira à des relations plus régulières que le groupe (A), qui renferme des signes ambigus. Sous le rapport algébrique on voit facilement que ces formules (A) peuvent être remplacées par un groupe de la forme $(\overline{A})$, où l'on admettrait des nombres négatifs pour quelques-uns des résidus et des quotients; par exemple, si deux équations consécutives du premier groupe (A) sont

$$A = a_3 p_3 + a_4, \quad A = a_4 p_4 + a_5,$$

elles peuvent être présentées sous la forme

$$A = a_3 p_3 - (-a_4), \quad A = (-a_4)(-p_4) - (-a_5).$$

qui seront celles du groupe $(\overline{A})$ si l'on pose

$$a'_4 = -a_4, \quad p'_4 = -p_4, \quad a'_5 = -a_5.$$

Ainsi, en supposant que les résidus du groupe $(\overline{A})$ soient pris de manière que

$$a'_1 = \mp a_1, \quad a'_2 = \mp a_2, \quad a'_3 = \mp a_3, \ldots, \quad a'_n = \mp a_n;$$

et que, faisant correspondre les signes de cette ligne et de la suivante, l'on pose aussi

$$p'_1 = \mp p_1, \quad p'_2 = \mp p_2, \quad p'_3 = \mp p_3, \ldots, \quad p'_{n-1} = \mp p_{n-1};$$

le groupe $(\overline{A})$ remplacera complétement le premier groupe (A), aux signes ambigus. Pour passer d'un groupe à l'autre, on devra simplement se rappeler que

$$a'_i p'_i = (\mp a_i)(\mp p_i) = a_i p_i.$$

Cette manière de présenter les équations (A) sous la forme plus régulière $(\overline{A})$ n'est pas sans analogie avec le mode introduit par M. Sturm, dans les formules qui servent de base à son beau théorème sur les équations algébriques.

[IV]. Nous nous dispenserons ordinairement, pour plus de simplicité, d'écrire des accents supérieurs aux lettres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, $p'_1, p'_2, \ldots, p'_{n-1}$ dans les formules $(\overline{A})$; et nous allons les considérer sous la forme

$$(\overline{A}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = a\,p - a_1, \\ A = a_1 p_1 - a_2, \\ A = a_2 p_2 - a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A = a_{n-2} p_{n-2} - a_{n-1}, \\ A = a_{n-1} p_{n-1} - a_n, \quad \text{et} \quad A = a_n p_n. \end{array} \right.$$

Ce groupe d'égalités résulte donc de $n+1$ divisions dans lesquelles un résidu a_i peut être négatif ou positif, sous la condition que le quotient de même indice p_i aura le signe de a_i : le décroissement des résidus $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sera, si l'on veut, celui que donne le mode ordinaire de l'arithmétique, ou celui des moindres résidus, qui diminuent communément en raison plus que double, lorsqu'on passe de l'un des résidus au suivant.

La première de ces équations multipliée par p_1, et ajoutée à la seconde, donne

$$A(1+p_1) = ap_1p - a_2;$$

celle-ci, multipliée par p_2 et ajoutée à la troisième équation du groupe, donne

$$A(1+p_2+p_2p_1) = ap_2p_1p - a_3;$$

en employant les i premières équations, on aura de la même manière

$$(1)\quad \begin{cases} A(1+p_{i-1}+p_{i-1}p_{i-2}+\text{etc.}+p_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}\ldots p_2p_1) \\ \qquad\qquad = ap_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}\ldots p_2p_1p - a_i, \end{cases}$$

ou bien encore

$$ap_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}\ldots p_1p = a_i + A(1+p_{i-1}+p_{i-1}p_{i-2}+\text{etc.}+p_{i-1}p_{i-2}\ldots p_2p_1);$$

et si l'on pose $i=n$, c'est-à-dire, si entre les n équations on a éliminé $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, on a ce résultat

$$(2)\quad app_1p_2\ldots p_{n-1} = a_n + A(1+p_{n-1}+p_{n-2}p_{n-1}+\text{etc.}+p_1p_2\ldots p_{n-1}).$$

On voit que cette formule s'obtient en ajoutant la $n^{ième}$ formule du groupe à la $(n-1)^{ième}$ multipliée par p_{n-1},

à la $(n-2)^{ième}$ multipliée par $p_{n-1}p_{n-2}$,

à la $(n-3)^{ième}$ multipliée par $p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3}$,

et ainsi de suite jusqu'à la première, qui sera multipliée par $p_{n-1}p_{n-2}p_{n-3}\ldots p_2p_1$.

Si l'on n'ajoute que les $n - i - 1$ premiers de ces produits, on aura éliminé les résidus $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{i-1}$, et l'équation résultante sera

$$3 \quad \left\{ \begin{aligned} &A(1 + p_{n-1} + p_{n-1}p_{n-2} + \text{etc.} + p_{n-1}p_{n-2}\ldots p_{i+1}) \\ &\qquad = a_i p_{n-1} p_{n-2} p_{n-3} \ldots p_{i+1} p_i - a_n. \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$a_i p_i p_{i+1} p_{i+2} \ldots p_{n-2} p_{n-1} = a_n + A(1 + p_{n-1} + \text{etc.} + p_{i+1} p_{i+2} \ldots p_{n-1}).$$

Il suit de cette formule que le produit

$$a_i p_i p_{i+1} p_{i+2} \ldots p_{n-2} p_{n-1}.$$

étant divisé par A, donne a_n pour résidu, en sorte que les différents produits

$$\begin{aligned} a_0 p_0 p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1}, \\ a_1 p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1}, \\ a_2 p_2 p_3 \ldots p_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} p_{n-1}, \end{aligned}$$

sont des entiers congrus entre eux relativement au module A, tous ont a_n pour résidu commun. Ces entiers peuvent avoir des signes positifs ou négatifs, à cause des nombres $p_1, p_2, p_3, \ldots$ etc., qui entrent comme facteurs : il sera toujours facile de déterminer le signe du produit par les signes des facteurs.

On pourrait aisément déduire l'équation (2) d'une formule donnée autrefois par Lambert pour l'évaluation d'une fraction $\frac{a}{A}$ au moyen de la somme d'un certain nombre de fractions ayant toutes pour numérateur commun l'unité. Cet objet a été traité depuis par Lagrange dans le Ve cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Pour retrouver la formule de Lambert, il suffirait de diviser la formule (2) par

$p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et par A ; mais l'objet de nos recherches exige que l'équation conserve la forme sous laquelle nous l'avons établie.

[V] Il est clair, par l'équation (1),

$$a\,p_{i-1}\,p_{i-2}\cdots p_2\,p_1\,p = a_i + A\left\{\begin{array}{l} 1 - p_{i-1} - p_{i-1}\,p_{i-2} - \text{etc.} \\ - p_{i-1}\,p_{i-2}\cdots p_2\,p_1 \end{array}\right\},$$

que tout diviseur commun à A et à a divise l'un quelconque des résidus a_i. Ainsi le plus grand diviseur Δ de a et A sera nécessairement facteur de chacun des résidus $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, et quand l'un de ces nombres sera premier il ne pourra y avoir de diviseur commun à a et à A ; mais un facteur de a_i qui diviserait A, pourrait ne pas diviser a, parce que l'équation (1) exige seulement qu'il divise le produit $a\,p_{i-1}\,p_{i-2}\cdots p_2\,p_1\,p$, et le diviseur en question pourra ne diviser que le produit $p_{i-1}\,p_{i-2}\cdots p_2\,p_1\,p$. Si l'on considère spécialement l'équation (2), on en conclura que le grand diviseur Δ doit être facteur du dernier résidu a_n, et ce grand diviseur sera a_n lui-même, si a_n divise a.

Ces conséquences pouvaient être tirées des équations (A) ou (A) avant d'en avoir déduit l'égalité (2) : en effet, par la première formule

$$A = ap - a_1,$$

il est clair que tout diviseur de A et a divise a_1 ; mais un diviseur de A et a_1 est seulement obligé de diviser ap et il peut ne diviser que p sans diviser a ; il pourrait aussi avoir un de ses facteurs dans p et un autre facteur, complémentaire du premier, dans a. Quand on sera assuré que p n'a pas de diviseur commun avec A, il en résultera qu'un diviseur de A et a_1 divise a. Par la seconde formule

$$A = a_1 p_1 - a_2,$$

on voit semblablement que tout diviseur de A et a_1 divise a_2 ; ainsi le grand diviseur Δ est parmi les facteurs de a_2 comme il était parmi ceux de a_1. On prouvera de la même manière qu'il est compris parmi les diviseurs de a_3, de a_4, ..., de a_{n-1} et de a_n : ainsi il ne peut surpasser a_n, et sera par conséquent le grand diviseur commun à a et a_n : or a_n

est beaucoup moindre que a dès que n est un nombre de quelques unités.

[VI]. Cette considération peut conduire à une méthode nouvelle pour parvenir au plus grand diviseur Δ de deux entiers : elle sera également applicable aux polynomes algébriques entiers. Nous allons la développer pour les nombres.

On s'assurera, par la division, si a_n est diviseur de a, et nous venons de prouver qu'alors a_n sera le grand diviseur Δ des nombres A et a. Si la division ne se fait pas exactement, on nommera $-b_1$ et q le quotient de cette division, en sorte que

$$a = a_n q - b_1;$$

on divisera encore a par b_1. Soient q_1 le quotient et $-b_2$ le reste; on divisera a par b_2; soient q_2 le quotient et $-b_3$ le reste; cette suite de divisions semblables à celles qui ont été opérées sur A, amènera des résidus $b_1, b_2, \ldots, b_{n'}$ qui formeront une série fort décroissante : la dernière de ces divisions sera représentée par

$$a = b_{n'} q_{n'},$$

et la précédente par

$$a = b_{n'-1} q_{n'-1} - b_{n'}:$$

pour mieux nous faire comprendre, nous nommerons ce système d'opérations la seconde catégorie de divisions $(\overline{a})$: les n divisions où A a servi de dividende seront désignées sous le nom de première catégorie $(\overline{A})$. D'après la formule (2) établie ci-dessus, l'on aura cette relation résultant des n' divisions $(\overline{a})$,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} a\,(1 - q_{n'-1} + q_{n'-1} q_{n'-2} \cdots - q_{n'-1} q_{n'-2} \cdots q_2 q_1) \\ = a_n q_{n'-1} q_{n'-2} \cdots q_1 q - b_{n'}: \end{aligned} \right.$$

Nous savons, par ce qui a été expliqué ci-dessus [V], que le grand diviseur de a et de a_n ne peut surpasser le résidu $b_{n'}$, et doit en être facteur; le plus communément (ou du moins bien souvent) pour des

nombres A et a qui ne seront pas immenses, on trouvera que $b_{n'}$ est diviseur de a_n, et alors il sera le grand diviseur cherché; si a_n n'est pas exactement divisible par $b_{n'}$, on opérera sur a_n et $b_{n'}$ comme on vient de faire avec a et a_n : en dénotant encore par $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n''-1}$ les quotients, et par $-c_1, -c_2, -c_3, \ldots, -c_{n''-1}, -c_{n''}$ les restes des opérations, on aura la relation

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_n(1 + r_{n''-1} + r_{n''-1} r_{n''-2} + \text{etc.} + r_{n'-1} r_{n''-2} \ldots r_2 r_1) \\ & \qquad\qquad = b_n r_{n''-1} r_{n''-2} \ldots r_2 r_1 r - c_{n''}. \end{aligned} \right.$$

On devra reconnaître si $c_{n''}$ divise exactement $b_{n'}$: alors $c_{n''}$ serait le diviseur Δ cherché; la même série d'opérations sera prolongée jusqu'à ce que l'on rencontre un résidu, tel que $c_{n''}$, qui divise exactement le dernier résidu $b_{n'}$ provenant d'une catégorie de n' divisions antérieures aux n'' divisions exécutées en dernier lieu : c'est ce qui ne peut manquer d'arriver puisque le premier reste a_n est beaucoup moindre que a; que $b_{n'}$ est beaucoup moindre que a_n; $c_{n''}$ beaucoup moindre que $b_{n'}$, et ainsi de suite. Que si, dans chacune des divisions, l'on a eu recours aux moindres résidus, en leur donnant des signes convenables, on aura, art. [II],

$$a > 2^n a_n, \quad a_n > 2^{n'} b_{n'}, \quad b_{n'} > 2^{n''} c_{n''},$$

et par suite

$$a > 2^{n+n'+n''} c_{n''}, \quad \text{et} \quad c_{n''} < \frac{a}{2^{n+n'+n''}},$$

et $c_{n''}$ sera généralement fort au-dessous de cette limite. On voit que si l'on détermine le nombre ν de manière que

$$2^{\nu-1} < a < 2^{\nu},$$

on aura

$$\frac{a}{2^{\nu}} < 1 :$$

et que par conséquent le nombre $n+n'+n''+$ etc. de toutes les divisions exécutées sera moindre que ν qui est le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{\log a}{\log 2}$.

[VII]. Nous avons déjà fait observer [III] que si l'on a pratiqué beaucoup de divisions dans la première catégorie, qui a donné le résidu a_n, ce reste est considérablement moindre que a : il arrivera même souvent que a_n se présentera assez faible après un petit nombre n d'opérations. Cette remarque convient aux autres catégories de divisions que l'on sera parfois amené à exécuter : elle fera concevoir que le calcul du grand diviseur par ce procédé, ordinairement moins simple que celui de la méthode d'Euclide, n'entraînera pourtant pas beaucoup plus de travail. Cette opération est une des plus parfaites de l'arithmétique, surtout quand on y introduit l'usage des résidus qui ne surpassent pas la moitié du diviseur de chaque division [art. II]; et si l'on n'avait pour but que de trouver le grand diviseur de deux entiers, je ne pourrais conseiller de lui substituer le nouveau procédé. On doit y employer A comme dividende n fois de suite; puis a sert de dividende n' fois de suite, avec différents diviseurs, etc. Dans la méthode d'Euclide on a l'avantage de voir le dividende et le diviseur décroître d'une division à la suivante. Mais le nouveau procédé conduit à des relations beaucoup moins compliquées que celles de la méthode d'Euclide, entre les entiers A et a, les divers résidus, et les quotients fournis par les divisions successives. La raison de cette plus grande simplicité tient à ce que, dans une même catégorie de nos divisions, la relation de deux résidus consécutifs est de la forme

$$A = a_{i+1} p_{i+1} + a_i,$$

qui est une équation à différences finies du premier ordre; et dans la méthode d'Euclide on a, pour lier entre eux les résidus, une équation du second ordre

$$z_{i-2} = z_{i-1} q_{i-1} + z_i.$$

Ce n'est qu'en passant d'une catégorie à l'autre de nos divisions, que l'on retrouve des relations de cette forme, ainsi qu'on le verra art. [IX]; mais ce passage ne peut avoir lieu qu'un petit nombre de fois, à moins qu'il ne s'agisse pour a d'un nombre immense, et dans ce cas toutes les méthodes vous exposent à de fort longs calculs.

[VIII]. Afin de donner une idée plus complète de ce procédé, on va l'appliquer à deux exemples : on comparera la nouvelle marche dans le second, qui emploie des nombres un peu grands, à celle d'Euclide.

Prenons d'abord $A = 1170$, $a = 705$; les divisions de la première catégorie, où A est constamment employé comme dividende, sont indiquées dans ce tableau :

A	a	$-a_1$	a_2
1170	705	-240	30
	2	-5	39
	p	p_1	$-p_2$

On voit que le premier résidu négatif $-a_1 = -240$; le second résidu de la division de A par a_1 est $-a_2 = -30$, celui-ci donne un quotient exact -39 : les deux autres quotients sont $p = 2$, $-p_1 = -5$. Pour s'assurer si $a_2 = 30$ est le grand diviseur et, dans tous les cas, pour le découvrir, on procède à une nouvelle catégorie de divisions, dans lesquelles $705 = a$ va servir de dividende :

a	a_2	b_1
705	30	15
	23	47

Le résidu $15 = b_1$ divise 705, et donne 47 pour quotient : on n'a plus qu'à reconnaître s'il divise le résidu $a_2 = 30$ de la première catégorie : or cette division ayant lieu, il s'ensuit que 15 est le plus grand diviseur commun des nombres 1170 et 705 : toutes les divisions ont été effectuées de manière à fournir les moindres résidus.

Le second exemple offrira l'emploi de trois catégories de divisions : soient $A = 1292646$ et $a = 145145$; nous effectuerons encore les divisions de manière que les valeurs numériques des résidus n'excèdent pas

le demi-diviseur. Voici le tableau de la première catégorie de divisions où le dividende est constamment $A = 1292646$.

A	a	$-a_1$	$-a_2$	$-a$
1292646	145145	-13659	-4959	-1653
	9	-95	-261	-782
	p	$-p_1$	$-p_2$	$-p$.

Les diviseurs a, a_1, a_2, a_3, fournissent les quotients 9, 95, 261, 782, qui croissent rapidement parce que chaque diviseur n'atteint pas la moitié du précédent : la division de A par a_3 donnant un quotient exact, le grand commun diviseur doit être facteur de 1653; pour le découvrir, on procède à une seconde catégorie de divisions :

a	a_3	$-b_1$
145145	1653	-319
	88	-455
	q	$-q_1$

Une seule division amène le résidu $b_1 = 319$, qui divise exactement $a = 145145$. On doit procéder à la troisième catégorie, où le dividende constant sera $a_2 = 1653$,

	b_1	c	c_1
1653	319	58	29
	5	28	57
	r	r_1	r_2

Elle conduit à un résidu $29 = c_2$ qui est exact diviseur de $316 = b_1$, car $319 = 29 \times 11$; et il en résulte que 29 est le plus grand diviseur des nombres proposés.

Je rapporterai ici le tableau des opérations de la méthode d'Euclide, à l'aide de divisions ordinaires :

1292646	145145	131486	13659	8555	5104	3451	1653	145	58	29
	8	1	9	1	1	1	2	11	2	2

En exécutant les divisions à l'aide de résidus moindres que les demi-diviseurs, on aura moins d'opérations. En voici le tableau :

1292646	145145	−13659	−5104	−1653	145	58	29
	9	−11	3	2	−11	2	2

Dans cet exemple, on voit que le nouveau procédé employé avec les moindres résidus, a entraîné 9 divisions; l'ancienne méthode en exige 10, et quand on y fait concourir les moindres résidus, 7 divisions suffisent pour faire connaître le grand diviseur 29.

[IX]. Nous ferons, pour abréger, dans l'équation (2),

$$P = p\,p_1\,p_2 \cdots p_{n-2}\,p_{n-1},$$
$$P_1 = p_1\,p_2\,p_3 \cdots p_{n-2}\,p_{n-1} + p_2\,p_3 \cdots p_{n-1} + \text{etc.} + p_{n-2}\,p_{n-1} + p_{n-1} + 1:$$

elle deviendra

$$a_n = aP - AP_1:$$

dans les formules (4) et (5) nous écrirons pareillement

$$Q = q\,q_1\,q_2 \cdots q_{n'-2}\,q_{n'-1},$$
$$Q_1 = q_1\,q_2 \cdots q_{n'-2}\,q_{n'-1} + q_2\,q_3 \cdots q_{n'-1} + \text{etc.} + q_{n'-1} + 1,$$
$$R = r\,r_1\,r_2 \cdots r_{n''-2}\,r_{n''-1},$$
$$R_1 = r_1\,r_2 \cdots r_{n''-2}\,r_{n''-1} + \text{etc.} + r_{n''-1} + 1;$$
$$S = s\,s_1 \cdots s_{n'''-1},$$
etc.;

l'on aura ainsi

$$(4) \qquad a_n = aP - AP_1,$$

$$(5) \qquad b_{n'} = a_n Q - aQ_1,$$

$$(6) \qquad c_{n''} = b_{n'} R - a_n R_1,$$

$$(7) \qquad d_{n'''} = c_{n''} S - b_{n'} S_1,$$

etc.

Lorsque a_n divisera exactement a, il sera le grand diviseur de a et de A; son expression, donnée par la formule (4), sera

$$a_n = aP - AP_1,$$

et les équations suivantes n'auront pas lieu; mais si l'on reconnaît que $b_{n'}$ est le grand diviseur cherché, on aura les deux équations

$$b_{n'} = a_n Q - aQ_1, \quad \text{et} \quad a_n = aP - AP_1;$$

la dernière étant multipliée par Q, et ajoutée à la précédente donnera, en réunissant les termes affectés de a,

$$(8) \qquad b_{n'} = a(PQ - Q_1) - AP_1 Q.$$

Souvent ces deux catégories de divisions auront suffi pour faire connaître le grand diviseur, qui sera alors $b_{n'}$: nous indiquerons plus bas quelques circonstances qui peuvent réduire la recherche à la première catégorie, ou aux deux premières, ou etc. Lorsque l'on devra recourir à la troisième catégorie de n'' divisions et que $c_{n''}$ sera reconnu le diviseur de $b_{n'}$, et par suite de A et a, les trois équations (4), (5), (6) existeront ensemble; des deux dernières on déduit, par l'élimination de $b_{n'}$,

$$c_{n''} = a_n(QR - R_1) - aQ_1 R,$$

qui ne diffère de l'équation que nous venons d'écrire qu'en ce que $c_{n'}$ remplace $b_{n'}$, a_n et a remplacent a et A, et enfin P, Q, P_1, Q_1 sont respectivement remplacés par Q, R, Q_1, R_1. Dans cette formule on substitue la valeur

$$(4) \qquad a_n = aP - AP_1,$$

ou, ce qui revient au même, on multiplie cette équation (4) par $QR - R_1$ pour l'ajouter à la précédente égalité; il en résulte

$$(9) \qquad c_{n''} = a(PQR - PR_1 - RQ_1 + AP_1(QR - R_1)).$$

Si l'on était obligé de recourir à une quatrième catégorie de divisions en nombre n''' pour atteindre le diviseur $d_{n'''}$, on déduirait des trois valeurs de $d_{n'''}$, de $c_{n''}$, de $b_{n'}$, cette équation

$$d_{n'''} = a_n(QRS - QS_1 - SR_1 + Q_1(RS - S_1)) +$$

cette équation, jointe à la première,

$$a_n = aP - AP_1,$$

donne, par l'élimination de a_n,

$$(10) \quad \begin{cases} d_{n'''} = a[PQRS - RSQ_1 - SPR_1 + PQS_1 + Q_1S_1] \\ \quad - AP_1[QRS - SR_1 + QS_1]. \end{cases}$$

On continuerait de la même manière, si de nouvelles catégories de divisions avaient été nécessaires pour arriver au grand diviseur Δ : en admettant cette possibilité, je dirai cependant que je n'ai pas rencontré d'exemple qui exigeât plus de trois catégories, et ce dernier cas s'est même rarement présenté dans un assez grand nombre d'exemples.

On peut observer, dans ces formules, que le grand diviseur Δ, soit a_n, soit $b_{n'}$, soit $c_{n''}$, etc., se présente sous la forme $a\nu - A\mu$, ν et μ étant des nombres entiers dont la composition est connue à l'aide des quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$; $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$; $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$; etc. Dans ses *Nouveaux Exercices d'analyse*, M. Cauchy a remarqué que le grand diviseur de a et A est de cette forme [*voyez* tome II]; mais on n'avait pas aperçu la composition qui résulte des opérations que je viens d'indiquer.

[X]. Afin d'introduire dans ces diverses relations, et spécialement dans la formule (2), les quotients positifs tels qu'ils se sont présentés dans le premier groupe (A), nous rétablirons pour un instant des ac-

cents aux lettres $p', p'_1, p'_2, \ldots, p'_{n-1}, a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_{n-1}$, et nous reprendrons l'équation (2) sous la forme

$$a p' p'_1 p'_2 \ldots p'_{n-1} = a'_n + A \left\{ \begin{array}{l} 1 + p'_{n-1} + p'_{n-1} p'_{n-2} + \text{etc.} \\ \quad + p'_{n-1} p'_{n-2} \ldots p'_2 p'_1 \end{array} \right\} :$$

pour revenir du groupe $(\overline{A})$ au premier (A), il faut se rappeler que chaque résidu $-a'_i = \pm a_i$ est accompagné de $p'_i = \mp p_i$. Le signe du produit $p' p'_1 p'_2 \ldots p'_{n-1}$ va donc dépendre des seuls quotients négatifs $p'_g = -p_g$, $p'_h = -p_h, \ldots$, et par conséquent du nombre des résidus *positifs* $+a_g = -a'_g$, $+a_h = -a'_h$, etc. Quant à sa grandeur numérique, elle est égale au produit $p p_1 p_2 \ldots p_{n-1}$. Nommons m le nombre des résidus positifs contenus dans la suite complète

$$\pm a_1, \ \pm a_2, \ \pm a_3, \ldots\ldots, \ \pm a_{n-1}, \ \pm a_n.$$

Deux cas sont à distinguer : le dernier résidu peut être $+a_n$, et alors, parmi les restes précédents, il ne s'en trouvera que $m-1$ affectés du signe positif, tels que

$$a_g = -a'_g, \quad a_h = -a'_h, \text{ etc. :}$$

à ces résidus négatifs a'_g, a'_h, répondent des quotients négatifs, et en nombre $m-1$,

$$p'_g = -p_g, \quad p'_h = -p_h, \text{ etc.}$$

Dans ce premier cas l'on aura donc pour le produit

$$p' p'_1 p'_2 p'_3 \ldots p'_{n-1} = p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1} (-1)^{m-1};$$

l'équation (2) deviendra, d'après cela,

$$a p p_1 p_2 \ldots p_{n-1} (-1)^{m-1} = -a_n + A \left\{ \begin{array}{l} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} (-1)^{m-1} \pm p_2 p_3 \ldots p_{n-1} - \text{etc.} \\ \quad \pm p_{n-2} p_{n-1} \pm p_{n-1} - 1 \end{array} \right\} :$$

ou bien, après avoir multiplié par $(-1)^{m-1}$,

$$a p p_1 \ldots p_{n-1} = a_n (-1)^m - A \left\{ \begin{array}{l} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \pm p_2 p_3 \ldots p_{n-1} - \text{etc.} \\ \pm p_{n-2} p_{n-1} \pm p_{n-1} + (-1)^{m-1} \end{array} \right\}.$$

Dans le second cas, où le dernier résidu $-a'_n = -a_n$, les m résidus positifs du groupe (A) sont compris parmi les $n-1$ précédents $\pm a_1$, $\pm a_2, \ldots, \pm a_{n-1}$, et alors les quotients négatifs

$$p'_g = -p_g, \quad p'_h = -p_h, \text{ etc.}$$

étant en nombre m, le produit

$$p'_1 p'_2 \cdots p'_{n-1} = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} (-1)^m,$$

car l'on a toujours $p' = p$; ainsi l'équation (2'), après avoir été multipliée par $(-1)^m$, deviendra

$$a p p_1 p_2 \cdots p_{n-1} = a_n (-1)^m - A \left\{ \begin{array}{l} p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \pm p_2 p_3 \cdots p_{n-1} \pm \text{etc.} \\ \pm p_{n-2} p_{n-1} \pm p_{n-1} + (-1)^m \end{array} \right\}.$$

La partie non affectée du nombre entier A a la même forme dans les deux cas de $+a_n$ et de $-a_n$: les signes de la fonction multipliée par A seront faciles à déterminer, en ayant égard à la multiplication de $(-1)^{m-1}$ ou de $(-1)^m$ qui a lieu quand $a'_n = -a_n$, ou quand $a'_n = a_n$; et en introduisant dans chaque terme de la fonction

$$p'_1 p'_2 p'_3 \cdots p'_{n-1} + p'_2 p'_3 p'_4 \cdots p'_{n-1} + \text{etc.} + p'_{n-1} + 1,$$

les quotients négatifs $p'_g = -p_g$, $p'_h = -p_h$, etc.

Il est donc établi qu'en partant du groupe (A), où nous supposons un nombre m de résidus positifs $+a_g$, $+a_h$, etc., on obtient entre A, a, et le $n^{ième}$ résidu a_n, l'équation

$$(11) \qquad a\mathrm{P} - \mathrm{AP}_1 = a_n (-1)^m,$$

où

$$\mathrm{P} = p\, p_1 p_2 \cdots p_{n-1},$$
$$\mathrm{P}_1 = p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} \pm p_2 p_3 \cdots p_{n-1} + \text{etc.} \pm p_{n-1} \pm 1.$$

On eût obtenu évidemment un semblable résultat en n'employant que les i premières équations (A) entre A, a, a_1, $a_2, \ldots$, et a_i : il suffirait d'écrire dans l'équation (11), i à la place de n, et de remplacer m

par le nombre des résidus positifs renfermés dans la série

$$\pm a_1, \quad \pm a_2, \quad \pm a_3, \quad \ldots, \quad \pm a_i,$$

pour former cette relation.

Dans l'équation (11) les quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, ainsi que a_n, sont maintenant censés des nombres positifs, parce qu'ils proviennent du premier groupe (A).

[XI]. Lorsque les entiers A et a n'ont pas de commun diviseur, et qu'ils ont été cependant soumis au système d'opérations qui produisent les quotients $p, p_1, \ldots, p_{n-1}, q, q_1, q_2, \ldots, q'_{n'-1}$, etc., le dernier des résidus, soit a_n, soit $b_{n'}$, soit $c_{n''}$, etc. qui devrait être le grand diviseur commun de A et a, s'il existait, se présentera sous la forme ± 1. Ce cas spécial, où A et a, sont premiers entre eux, mérite une attention particulière, en raison des relations qui s'ensuivent pour les deux nombres proposés A et a, d'après les équations de l'article [IX].

Si pour a_n on rencontre la valeur $a_n = \pm 1$, l'on aura, en vertu de l'équation (11), cette relation en a et A

$$(12) \qquad aP - AP_1 = (-1)^m,$$

où m indique encore le dénombrement des résidus positifs introduits dans le premier groupe des divisions (A) : P a la même valeur $p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}$ que ci-dessus, et il en est ainsi de P_1 dont la forme en $p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}$ est plus compliquée, mais connue.

Nous ferons voir que cette relation a souvent lieu entre deux nombres a et A; il sera prouvé ci-dessous qu'elle existe nécessairement lorsque $A > a$ est un nombre premier.

Quand a_n ne sera pas égal à ± 1, et qu'après avoir formé la seconde catégorie de divisions, où a est employé comme dividende constant selon la règle de l'art. [VI], l'on rencontrera $b_{n'} = \pm 1$, l'équation (5) deviendra

$$a_n Q - aQ_1 = (-1)^{m'},$$

où m' dénote le nombre des résidus positifs introduits dans la seconde catégorie des divisions, Q étant le produit $q\,q_1\,q_2 \ldots q_{n-1}$ et Q_1 un

nombre entier connu à l'aide des quotients $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$, ou par l'équation elle-même quand on connaît a_n, Q, et a. On a d'ailleurs, dans tous les cas,

$$aP - AP_1 = a_n(-1)^m.$$

On peut écrire cette formule et la précédente ainsi :

$$a(P(-1)^m - AP_1(-1)^m) = a_n,$$
$$a_n(Q(-1)^m - aQ_1(-1)^m) = 1.$$

Ces deux formules ne diffèrent des équations (4) et (5) qu'en ce que P et P_1 sont multipliés par $(-1)^m$, Q et Q_1 le sont par $(-1)^m$, et b_n est ici égal à 1 ; éliminant entre elles le résidu a_n, on aura à la place de l'équation (8) cette égalité

$$(13) \qquad a[PQ(-1)^{m+m} - Q_1(-1)^m] - AP_1Q(-1)^{m+m} = 1;$$

on l'écrira plus simplement en la multipliant par $(-1)^{m+m}$: on aura de cette manière

$$(14) \qquad a[PQ - Q_1(-1)^m] - AP_1Q(-1)^{m+m}$$

Lorsque l'on ne trouvera pas $b_n = \pm 1$, mais que b_n sera > 1, on devra passer à une troisième catégorie de divisions pour rencontrer un résidu $c_n = \pm 1$; si l'on nomme m' le nombre des résidus positifs de ces nouvelles divisions, on aura, à la place des équations (4), (5), (6), trois équations que nous écrirons ainsi :

$$a(P(-1)^m - AP_1(-1)^m) = a_n,$$
$$a_n(Q(-1)^m - aQ_1(-1)^m) = b_n,$$
$$b_{n'}(R(-1)^{m'} - a_nR_1(-1)^{m'}) = 1,$$

et l'élimination de a_n et $b_{n'}$ entre ces égalités conduira à une formule semblable à l'équation (9) : on pourra la multiplier par $(-1)^{m+m'+m'}$, et alors elle sera

$$a[PQR - PR_1(-1)^{m'} - RQ_1(-1)^m] - AP_1[QR - R_1(-1)^{m'}] = -(-1)^{m+m+m'}.$$

Un résultat semblable aurait encore lieu, alors même qu'il faudrait poursuivre dans un plus grand nombre de catégories la recherche du dernier résidu ± 1 qui doit, en ce cas, remplacer le diviseur de a et A : c'est ce que prouvent les équations (9), ou (10), ou etc., dans lesquelles le dernier résidu sera toujours exprimé par une somme ou une différence de la forme $ax \pm Ay$, x et y étant des entiers. Ainsi, dans le cas que nous examinons, de a et A premiers entre eux, on arrivera à une équation de la forme

$$aM - AP_1M_1 = \pm 1,$$

dans laquelle les entiers M et $P_1 M_1$ seront assez simplement déterminés à l'aide de P, P_1, Q, Q_1, R, R_1, etc., qui eux-mêmes ne dépendent que des quotients p, p_1, p_2, etc., q, q_1, q_2, etc., r, r_1, r_2, etc. Les nombres M et P_1M_1 seront nécessairement hétérogènes, car s'ils admettaient un facteur commun, il devrait diviser ± 1, ce qui est impossible. Par la même raison, A est premier à M, et a l'est aussi à $P_1 M_1$.

[XII]. Nous avons déjà constaté par l'équation (1)

$$a\,p\,p_1\,p_2 \ldots p_{i-1} = a_i + A(1 + p_{i-1} + p_{i-1}\,p_{i-2} + \text{etc.}),$$

que tout diviseur de a et A est aussi facteur de a_i. Admettons que a soit hétérogène à A, comme dans l'art. [XI], et que de plus il en soit ainsi de chacun des quotients p, p_1, p_2, ..., p_{i-1} à l'égard du même A ; en ce cas, a_i sera sans diviseur commun avec A, et c'est ce que l'on a déduit des équations $(\overline{A})$ considérées successivement art. [V]. Réciproquement si a_i, a_{i-1}, a_{i-2},..., a_2, a_1, et a sont des entiers hétérogènes à A, il s'ensuivra que les quotients p, p_1, p_2, ..., p_{i-1} seront aussi hétérogènes à A.

Quand la série complète des quotients p, p_1, p_2, ..., p_{n-1} sera composée de nombres hétérogènes à A, et que a sera lui-même premier à A ; la suite des résidus a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n ne renfermera encore que des nombres hétérogènes à A : or le dernier reste a_n devant diviser exactement A, en vertu de sa définition [II], ce nombre ne peut être que ± 1 : ainsi la dernière des équations (A) sera

$$A = a_{n-1}\,p_{n-1} \pm 1\,;$$

et l'on pourra écrire $a_n = 1$, en ne considérant que la valeur numérique, le signe étant réservé. Dans le cas dont il s'agit, la formule (11) devient

$$(15) \qquad a\,p\,p_1\,p_2\,p_3 \cdots p_{n-2}\,p_{n-1} = (-1)^m - \mathrm{AP}_1 :$$

elle montre que le nombre entier résultant de la formule

$$a\,p\,p_1\,p_2 \cdots p_{n-2}\,p_{n-1} + (-1)^{m+1}$$

est toujours divisible par A, qui est premier à a, ainsi qu'à tous les quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, lesquels dérivent de A et de a, d'après les règles indiquées antérieurement art. [I].

Si toutes les divisions représentées par le groupe (A) ont été exécutées en dedans et avec des restes positifs $+a_1, +a_2, \ldots, +a_{n-1}, +a_n$ on aura $m = n$, et le nombre divisible par A sera

$$a\,p\,p_1\,p_2 \cdots p_{n-1} + (-1)^{n+1} ;$$

alors le multiplicateur P_1 de A, ou le quotient de la division par A, aura cette forme simple, où les termes ne présentent que des variations de signes,

$$\mathrm{P}_1 = p_1\,p_2\,p_3 \cdots p_{n-1} - p_2\,p_3 \cdots p_{n-1} + p_3\,p_4 \cdots p_{n-1} \mp \text{etc.}$$
$$\mp p_{n-2}\,p_{n-1} \mp p_{n-1} \mp 1.$$

Si toutes les divisions ont été exécutées en dehors ou avec des résidus négatifs, le nombre $m = 0$, et l'on aura

$$(15') \qquad a\,p\,p_1\,p_2 \cdots p_{n-1} - 1 = \mathrm{AP}_1 ;$$

alors tous les signes de P_1 seront positifs et sa valeur sera

$$\mathrm{P}_1 = p_1\,p_2\,p_3 \cdots p_{n-1} + p_2\,p_3 \cdots p_{n-1} + \text{etc.} + p_{n-1} + 1.$$

On devra ne pas oublier que les conditions de ces formules de A premier à a et à $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, reviennent à celles de A premier à a ainsi qu'aux résidus $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Dans le cas dont nous nous occupons, on met facilement en évidence la proposition exprimée par la formule (15), en écrivant les équations du groupe $(\overline{A})$ sous cette forme

$$\begin{aligned}
A + a_1 &= a\,p,\\
A + a_2 &= a_1\,p_1,\\
A + a_3 &= a_2\,p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A + a_{n-1} &= a_{n-2}\,p_{n-2},\\
A \pm 1 &= a_{n-1}\,p_{n-1}:
\end{aligned}$$

nous écrivons dans la dernière $A \pm 1$, parce qu'il a été établi ci-dessus que $a_n = \mp 1$. Si l'on forme le produit de ces égalités, le premier membre se composera de

$$(A + a_1)(A + a_2)\ldots(A + a_{n-1})(A \pm 1),$$

et après avoir développé les multiplications, on aura une classe de termes affectés de A, et un produit

$$\pm a_1\,a_2\,a_3\ldots a_{n-1}.$$

Ce produit pourra être transporté dans le second membre où se trouve déjà $a\,p\,p_1\,p_2\ldots p_{n-1} \times a_1\,a_2\,a_3\ldots a_{n-1}$; l'on aura donc cette formule

$$AM = (a\,p\,p_1\,p_2\ldots p_{n-1} \mp 1)\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_{n-1}:$$

les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, étant premiers à A, par hypothèse, il en résulte que l'autre facteur du second membre de l'équation, savoir,

$$a\,p\,p_1\,p_2\ldots p_{n-1} \mp 1$$

doit être divisible par A. Quand les formules $(\overline{A})$ proviennent du premier groupe (A), et que, dans ce groupe, il se trouve un nombre m

de restes positifs, on retrouve aisément les conditions de la formule (15), en introduisant dans le produit $p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1}$ un nombre m ou un nombre $m - 1$ de quotients négatifs, conformément à ce que nous avons expliqué art. [X]. La formule (15) a l'avantage de montrer la composition du multiplicateur de A, ce que l'on ne trouverait pas aussi facilement par le procédé actuel.

[XIII]. Prenons pour exemple $A = 77 = 7 \times 11$, et $a = 50$, on pourra disposer les divisions ainsi que l'indique ce tableau, où toutes les opérations ont été faites à la manière ordinaire de l'arithmétique et avec des restes positifs.

77	50	27	23	8	5	2	1
	1	2	3	9	15	38	

Les quotients $p, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$, sont

$$1,\ 2,\ 3,\ 9,\ 15,\ 38,$$

et ils n'ont pas de diviseurs communs avec $A = 7 \times 11$; les restes positifs, au nombre de $6 = m + n$, sont

$$27,\ 23,\ 8,\ 5,\ 2,\ 1,$$

et ils ont servi tour à tour de diviseur au même dividende 77; d'après le théorème (15), le produit

$$50.1.2.3.9.15.38$$

étant divisé par 77, doit donner $(-1)^6 = 1$ pour reste; c'est-à-dire que le nombre

$$50.2.3.9.15.38 - 1$$

doit être divisible par 77 : ce nombre est 1538999, qui égale, en effet, 77×19987.

On peut opérer les divisions en excès, et en introduisant des résidus négatifs à toutes les divisions ; on aura ainsi

77	50	− 23	− 15	− 13	− 1
	2	− 4	− 6	− 6	

Tous les restes étant négatifs, on a $m = 0$, et d'après la formule (12), le nombre

$$50.2\ 4\ 6.6 - 1 = 14399$$

doit être divisible par 77 : ce nombre est en effet le produit de 77×187.

En effectuant les divisions sous la condition d'avoir des restes moindres chacun que la moitié du précédent résidu, les opérations seront représentées dans ce tableau.

77	50	− 23	8	− 3	− 1
	2	− 3	10	− 26	

Les résidus 23, 8, 3, 1 décroissent en raison plus que double ; et pour remplir cette condition on a admis trois résidus négatifs − 23, − 3, − 1, et un seul positif, 8 : on a donc ici $m = 1$, et d'après la formule (12), le nombre

$$50 \times 2.3.10.26 + 1$$

doit être divisible par 77 : ce nombre est $78001 = 77 \times 1013$.

Si en posant toujours $A = 77$, on eût pris $a = 21$, les conditions de la formule (12) ne se fussent plus trouvées remplies. Voici les divisions en dedans.

77	21	14	7
	3	5	11

On se fût trouvé alors dans le cas de la formule (11), on eût eu

$p = 3$, $p_1 = 5$: $a_1 = 14$, $a_2 = 7$, $m = 2$; ainsi le nombre

$$21.3.5 - 7 = 308$$

doit être divisible par 77 : ce nombre $= 77 \times 4$. Ici se présente le diviseur commun 7 des nombres 21 et 77.

[XIV]. Les conditions exigées par la formule (15),

$$a p p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + (-1)^{m+1} = AP_1,$$

c'est-à-dire pour que le nombre entier

$$a p p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + (-1)^{m+1}$$

soit exactement divisible par A, peuvent être nombreuses; car il faut que A soit hétérogène à a et aux quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, fournis par une série de n divisions où A sert de dividende constant [I]. Néanmoins ces conditions seront remplies toutes les fois que l'on prendra pour A un nombre premier $\alpha > a$. Alors, en effet, les résidus décroissants $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, tous moindres que a, et par conséquent que α, seront sans diviseurs communs avec α, que l'on suppose premier : et il a été démontré antérieurement [XII] qu'alors les quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, sont eux-mêmes sans diviseurs communs avec $A = \alpha$: ce sont d'ailleurs des entiers moindres que le nombre premier, et cela suffisait pour dispenser de toute preuve. Il en résulte ce théorème, pour un nombre premier quelconque α :

divisez α par a; soit p le quotient et a_1 le reste;
divisez α par a_1; soit p_1 le quotient et a_2 le reste;
divisez α par a_2; soit p_2 le quotient et a_3 le reste;

par ces opérations consécutives vous arriverez à un reste $a_n = 1$, si vous avez exécuté toutes les divisions selon le mode ordinaire qui donne des restes positifs; cela posé, le nombre entier ainsi formé

$$(16) \qquad a p p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + (-1)^{m+1} = \alpha P_1,$$

sera nécessairement divisible par le nombre premier α, en sorte que dans cette formule P_1 sera un entier.

Si vous avez exécuté seulement m divisions en dedans, art. [I], et les $n - m$ autres divisions en dehors ou avec des résidus négatifs; que les quotients positifs des divisions soient encore dénotés par $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$; vous arriverez à un dernier résidu qui sera $+1$ ou -1, et le nombre entier

$$(16) \qquad a\,p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1} - (-1)^{m+1} = \alpha P_1$$

sera exactement divisible par α : ici les nombres p, p_1, p_2, etc., ainsi que P_1 et n, désignent des entiers différents de ceux du premier cas, où les résidus étaient tous positifs.

Si l'on a rendu tous les résidus négatifs, en exécutant les divisions en dehors, la formule (15) prendra cette expression plus simple

$$a\,p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1} - 1 = \alpha P_1,$$

car alors on doit prendre $m = 0$, m étant le nombre des opérations à résidus positifs.

Le théorème de Wilson établit que le nombre $2.3.4 \ldots (\alpha-2)(\alpha-1)+1$, ne sera divisible par α, que sous la condition de α premier. Le produit $2.3.4 \ldots (\alpha-1)$ devient d'une grandeur énorme dès que α n'est plus un petit nombre entier : cette difficulté d'arithmétique pratique rend assez rare l'emploi de cette belle propriété. Notre théorème montre qu'en prenant à volonté, un entier a dans la série $2.3.4 \ldots (\alpha-1)$, on peut facilement trouver les facteurs $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, qui doivent lui être associés, pour fournir la quantité $a\,p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1} \pm 1$ divisible par α; et le nombre n de ces facteurs sera non-seulement moindre que $\alpha - 2$, mais considérablement au-dessous de $a < \alpha$, quand a sera un peu grand [II].

Cette propriété, qui convient à tous les nombres premiers α, peut recevoir d'utiles applications. Nous avons déjà dit qu'elle n'est pas, comme le théorème de Wilson, un caractère exclusif du nombre premier, et c'est, d'ailleurs, ce que nous allons établir dans un instant. On connaît d'autres propriétés qui appartiennent aux nombres premiers et qui n'appartiennent pas à eux seuls : tel est le théorème de Fermat, selon lequel $a^{\alpha-1} - 1$ est divisible par α premier, quand a n'est

pas divisible par le même α : Euler a découvert que A étant un nombre composé et A′ étant le dénombrement des entiers moindres que A et premiers avec lui, le nombre entier $a^{A'} - 1$ est divisible par A, pourvu que a soit premier avec A.

[XV]. Voici d'autres cas généraux où les conditions de la formule (15) seront remplies : soit $A = \alpha^h$, α étant premier et h entier positif; si α est supérieur à a, les conditions dont il s'agit pour la formule (15) auront également lieu ; car α étant $> a$, et $a > a_1 > a_2 > a_3, \ldots$, ces entiers, tous moindres que α, seront premiers avec $A = \alpha^h$, puisqu'ils le seront avec α, qui est premier: par suite les entiers $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ seront premiers à A, d'après ce qui a été prouvé art. [XII], et c'est tout ce qu'exige la formule (15).

Si $A = \alpha . A_1$, A_1 étant un entier qui n'ait aucun facteur premier inférieur à α, et si l'on suppose $\alpha > a$, on en conclura sur-le-champ que les restes $a_1, a_2, \ldots$, tous moindres que α, ne peuvent avoir aucun facteur commun avec lui ni avec A_1, parce que les diviseurs premiers de A_1 ne sont pas moindres que α, par hypothèse; en ce cas, qui comprend les précédents, les conditions du théorème seront remplies, et le nombre

$$a\,p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1} \qquad 1^{\alpha-1}$$

sera un entier divisible par $A = \alpha A_1$.

α étant encore le moindre diviseur premier de $A = \alpha A_1$, supposons $a > \alpha$: après avoir formé les restes $\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_i$ des premières divisions de A par $a, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, si l'on a rencontré pour tous ces restes des nombres hétérogènes à A, et que a_i soit actuellement moindre que α, tous les autres résidus $\pm a_{i+1}$, etc., jusqu'au dernier a_n, seront premiers à A, puisqu'ils seront au-dessous de son plus petit diviseur α : dans ce cas tous les quotients seront aussi premiers à A, et les conditions de l'équation (15) seront assurées.

Ceci suffit pour montrer que la formule (15) et la proposition qu'elle exprime seront souvent applicables.

SECONDE PARTIE.

Application à la résolution de l'équation du premier degré en nombres entiers.

[XVII]. L'analyse précédente s'applique aisément à la détermination des entiers x et y propres à satisfaire à l'équation

$$ax - Ay = 1,$$

à laquelle on ramène la résolution de l'égalité $ax_1 - Ay_1 = B$ en posant

$$x_1 = Bx, \quad y_1 = By:$$

après avoir substitué, on pourra diviser par B, et l'on n'aura plus à traiter que l'équation

$$17 \qquad ax - Ay = 1,$$

où les entiers A et a devront être premiers entre eux.

On sait que, si l'on peut connaître d'une manière quelconque deux valeurs particulières x_0 et y_0 qui satisfassent à cette égalité, en sorte que

$$ax_0 - Ay_0 = 1,$$

on obtiendra sur-le-champ, pour les valeurs générales x, y,

$$x = x_0 + \lambda . A,$$
$$y = y_0 + \lambda . a,$$

λ étant un entier pris à volonté, positif ou non. Si l'on parvient à calculer facilement l'un des nombres x_0 ou y_0, on aura l'autre sans difficulté, puisque la valeur y_0, par exemple, est $y_0 = \frac{ax_0 - 1}{A}$: elle n'exigera qu'une multiplication et une division, dès que x_0 sera exactement connu comme nous le supposons.

Quand A est un nombre premier $\alpha > a$, l'équation étant

$$(18) \qquad ax - \alpha y = 1,$$

on arrive immédiatement à une valeur de x_0 à l'aide du théorème que nous avons établi [XIV]. En conservant les notations de cet article, nous avons reconnu, par l'équation (16), que

$$a\,p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1} - \alpha P_1 = (-1)^m;$$

ou bien, en représentant encore par P le produit $p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}$, et en multipliant l'équation par $(-1)^m$,

$$(16) \qquad aP(-1)^m - \alpha P_1(-1)^m = 1:$$

cette relation, où $P(-1)^m$, $P_1(-1)^m$ sont des entiers composés d'éléments numériques connus, autorise à prendre pour x_0 et y_0 les valeurs

$$x_0 = P(-1)^m, \quad y_0 = P_1(-1)^m;$$

on aura, par suite, ces valeurs générales de x et y,

$$(19) \qquad x = P(-1)^m + \lambda\alpha, \quad y = P_1(-1)^m + \lambda a,$$

λ étant un entier quelconque à volonté.

La valeur $x_0 = P(-1)^m$ sera d'un calcul plus simple que celle de $y_0 = P_1(-1)^m$, parce que P_1 serait composé d'un certain nombre de termes à évaluer séparément. On devra pour cette raison déduire, ainsi que nous l'avons dit pour y_0, la valeur de P_1 de l'équation

$$aP - \alpha P_1 = (-1)^m,$$

qui donne

$$P_1 = \frac{aP - (-1)^m}{\alpha}.$$

[XVIII]. Lorsque les quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ seront en petit nombre, le calcul de P sera facile; mais dans le cas où n serait un peu grand, et où ces quotients, qui servent maintenant de facteurs, seraient des nombres considérables, P deviendrait un fort grand nombre, pénible

à calculer. Mais on doit observer que, relativement à l'usage de P pour obtenir x, tout multiple de α renfermé dans P est sans utilité, et doit être négligé, parce qu'on peut le regarder comme compris dans la partie $\alpha\lambda$, qui est un multiple entier arbitraire de α. Soit $P_\alpha < \alpha$ le résidu positif ou négatif de P, selon le module α, et soit M le quotient de la division, en sorte que

$$P = P_\alpha + \alpha M;$$

la valeur de x_0 sera

$$x_0 = P_\alpha(-1)^m + \alpha M(-1)^m,$$

et celle de x est

$$x = P_\alpha(-1)^m + \alpha[\lambda + M(-1)^m],$$

ou bien encore

$$x = P_\alpha(-1)^m + \alpha\lambda_1,$$

λ_1 étant un entier pris à volonté : on indiquera dans l'article suivant comment on peut obtenir P_α sans être obligé de calculer complétement le produit P.

D'après la formule (16), on a

$$P_1 = \frac{aP_\alpha + a\alpha M - (-1)^m}{\alpha} = \frac{aP_\alpha - (-1)^m}{\alpha} + aM,$$

ainsi $\frac{aP_\alpha - (-1)^m}{\alpha}$ est un entier.

La valeur de P_1 substituée dans celle de y donne

$$y = \frac{aP_\alpha(-1)^m - 1}{\alpha} + a[\lambda + M(-1)^m],$$

et, en remplaçant par λ_1 le multiplicateur de a, elle est simplement

$$y = \frac{aP_\alpha(-1)^m - 1}{\alpha} + a\lambda_1,$$

que l'on eût formée en portant le valeur de x dans l'équation

$$ax - \alpha y = 1.$$

Ce couple (x, y) ne diffère de celui que nous avions en premier lieu, qu'en ce que le résidu $P_\alpha < \alpha$ remplace le produit P, d'où il tire son origine au moyen de la division de P par α, car λ_1 est un entier arbitraire comme l'était λ : on doit remarquer que le nombre M disparaît et est enveloppé dans λ_1. En posant $\lambda_1 = 0$, on aura simplement ce couple (x, y), que je dénote encore par x_0, y_0,

$$x_0 = P_\alpha(-1)^m,$$
$$y_0 = \frac{a P_\alpha(-1)^m - 1}{\alpha}.$$

Ces nombres seront respectivement au-dessous de α, et a, pour leurs grandeurs numériques : si x_0 est positif, on aura la plus simple solution en nombres positifs de l'équation proposée; mais si $P_\alpha(-1)^m$ était négatif, au lieu de prendre $\lambda_1 = 0$, on poserait $\lambda_1 = 1$, et alors les valeurs

$$x_0 = P_\alpha(-1)^m + \alpha,$$
$$y_0 = \frac{a[P_\alpha(-1)^m + \alpha] - 1}{\alpha},$$

seraient des nombres positifs et moindres que α et a respectivement; les inconnues déterminées sous cette condition résolvent le problème des nombres associés d'Euler (*Opusc. analyt.*); on sait qu'il a nommé associé du nombre entier $a < \alpha$, un nombre entier $x < \alpha$ et tel que le produit ax étant divisé par α, donne l'unité pour résidu ou reste de division; en sorte que x doit satisfaire à l'équation

$$ax = 1 + \alpha y,$$

que nous venons de traiter, et de plus il doit être $< \alpha$.

[XIX]. Cette solution repose entièrement sur le théorème (16), et, quant au calcul arithmétique, sur la détermination du résidu P_α du produit P. On peut obtenir ce résidu sans être obligé de calculer préalablement la valeur complète du produit P : en supposant P composé d'un certain nombre de facteurs considérables par leur grandeur, on pourra choisir les plus gros facteurs p_{n-1}, p_{n-2}, et si leur produit effec-

tué surpasse α, on le divisera par α, afin d'en tirer un résidu ρ relatif à ce module; on multipliera ce résidu ρ par p_{n-3}, et l'on prendra le résidu ρ_1 de ce nouveau produit partiel, toujours pour le même module α; ρ_1 sera lui-même multiplié par p_{n-4}, et l'on cherchera encore, par la division, le résidu du produit $\rho_1 p_{n-4}$: en continuant ainsi à multiplier le dernier résidu formé par un nouveau facteur de P, et poussant la série de ces opérations jusqu'au dernier facteur p, on parviendra évidemment au résidu cherché P_α. Les résidus partiels $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ seront tous moindres que α, et il en est ainsi de $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots$: ainsi les produits successivement formés n'atteindront pas α^2. Nous montrerons, dans un exemple, comment on peut faire concourir les divisions qui ont fourni les $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ à simplifier ces calculs. Cette recherche du résidu P_α n'est pas particulière au cas de α premier; elle sera utile pour d'autres applications; nous avons cru devoir en rappeler la marche, bien connue des personnes qui se sont occupées de la théorie des nombres entiers.

[XX]. Nous avons admis que a était moindre que le nombre premier α; s'il en était autrement et que l'équation fût

$$a'x - \alpha y = 1,$$

a' étant supérieur à α, on pourrait diviser le nombre a' par α; soient h le quotient de la division et $a < \alpha$ le reste, on aurait

$$a' = h.\alpha + a;$$

en mettant cette valeur de a' dans l'équation à résoudre, elle devient

$$(h\alpha + a)x - \alpha y = 1.$$

ou bien

$$ax - \alpha(y - hx) = 1.$$

En posant $y - hx = y'$, l'équation se change en

$$ax - \alpha y' = 1,$$

où $a < \alpha$; et cette congruence peut être traitée maintenant par la méthode qui vient d'être expliquée : elle fera connaître les valeurs de x et de y'; or $y = y' + hx$, et partant y sera connu quand on aura x et y'.

[XXI]. Pour premier exemple, nous prendrons l'équation

$$887.x - 1103.y = 1,$$

où 1103 est un nombre premier; voici le tableau des divisions exécutées selon la règle de l'article [1] et de manière que les résidus soient moindres que les demi-diviseurs :

		a_1	a_2	a
1103	887	216	23	-1
	1	5	48	
	p	p_1	p_2	

Dans chaque division 1103 a servi de dividende : les quotients sont 1, 5, 48; les résidus sont 216, 23 et -1; ainsi deux résidus sont positifs, et le nombre dénoté par $m = 2$; $n = 3$, puisqu'il y a trois divisions opérées avant de rencontrer le résidu ± 1. D'après cela, la valeur de x est, selon la formule (19),

$$(-1)^2 x = 1.5.48 - 1103.\lambda.$$

La valeur positive de $x < 1103$ est donc $5.48 = 240$; celle de y qui lui correspond sera donnée en mettant 240 à la place de x dans

$$y = \frac{887.x - 1}{1103} = \frac{887.240 - 1}{1103} = 193.$$

On a donc pour les valeurs générales de x et y,

$$x = 240 + 1103.\lambda,$$
$$y = 193 + 887.\lambda.$$

Cet exemple n'a exigé que des calculs fort simples, parce que les coefficients 1103 et 887 sont peu considérables. Par la méthode de Lagrange, il faut réduire en fraction continue la fraction $\frac{887}{1103}$: il a trouvé (*Algèbre* d'Euler)

$$\frac{887}{1103} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}}$$

les fractions convergentes que l'on doit calculer, par les règles ordinaires, sont

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{5}, \frac{37}{46}, \frac{78}{97}, \frac{115}{143}, \frac{193}{240}, \frac{887}{1103};$$

la méthode dont il s'agit enseigne que la fraction $\frac{193}{240}$ fournit des valeurs de x et de y, savoir, $x_n = 240$, $y_n = 193$, nombres que nous venons d'obtenir.

Nous donnerons un second exemple, où nous choisissons pour coefficients des nombres plus considérables : nous y expliquerons la manière de faire concourir les divisions qui auront fourni les quotients $p, p_1, p_2, \ldots$, à simplifier le calcul du résidu P_n du produit $P = pp_1p_2 \ldots p_{n-1}$. Le nombre $\alpha = 785809$ est premier d'après la table des diviseurs des nombres de Burckhardt : nous dirons, en passant, que cette table peut être utilement consultée pour des calculs de ce genre, et dans beaucoup d'autres occasions.

Soit donc l'équation

$$4598 . x^2 - 785809 . y^2 = 1 :$$

on cherchera, selon les règles des art. [I] et [XIV], les quotients

$p, p_1, p_2, \ldots$ Le tableau suivant présente les divisions effectuées avec les moindres résidus positifs ou négatifs.

α	a	$-a_1$	a_2	$-a_3$	a_4
785809	1598	-449	59	-12	1
	171	-1750	13319	-65484	
	p	$-p_1$	p_2	$-p_3$	

Quatre divisions ont été faites, en employant α comme dividende, pour parvenir au résidu $a_4 = 1$: deux résidus, 59 et 1, sont positifs; ainsi $m = 2$, et par suite $(-1)^m = 1$, on aura donc, d'après la formule (19), cette valeur générale de x, pour l'équation donnée,

$$x = 171 + 1750 \times 13319 \times 65484 - \gamma.\alpha.$$

Avec cette valeur de x on obtiendra celle de y, par l'équation même qui donne

$$y = \frac{ax - 1}{\alpha},$$

elle n'exigera plus qu'une multiplication et une division.

Cette valeur de x exigerait la formation du produit

$$P = 171 \times 1750 \times 13319 \times 65484,$$

qui renfermerait 15 chiffres; l'on a ordinairement besoin de solutions plus simples, et dont la valeur numérique ne dépasse pas α.

On peut éviter, ainsi que nous l'avons dit, de calculer complétement ce produit, et arriver au résidu que fournirait la division de P_α par α. Pour cela on prendra d'abord les deux facteurs

$$13319 \times 65484 :$$

on divise 13319 par $a = 12$, cela donne

$$13319 = 12 \times 1109 + 11 = 12 \times 1110 - 1 :$$

multipliant par $p_3 = 65484$, on aura

$$13319 \times 65484 = 1110 \times 12 \times 65484 - 65484;$$

mais par la quatrième division on a

$$12 \times 65484 = 785890 - 1 = \alpha - 1;$$

on aura donc

$$13319 \times 65484 = 1110(\alpha - 1) - 65484.$$

On négligera la partie qui est multiple de $\alpha = 785809$, et l'on ne prendra que le résidu de ce produit

$$-1110 - 65484 = -66594.$$

Ce nombre doit être encore multiplié par les facteurs 171×1750 : on pourra semblablement employer l'une ou l'autre des divisions qui ont amené les quotients $p = 171$, ou $p_2 = 1750$, et l'on trouvera pour résidu du produit P, le nombre négatif $P_\alpha = -138260$; enfin, ajoutant $\alpha = 785809$, on a

$$875809 - 138260 = 647549;$$

ce sera la valeur positive de x moindre que α; c'est le nombre associé de 4598 relativement au nombre premier α. Cette valeur de x étant connue, on obtiendra par la division celle de

$$y = \frac{4558 \times 647549 - 1}{\alpha} = 3789.$$

On aura donc encore pour solution générale de l'équation proposée

$$x = 647549 + 785809.\lambda,$$
$$y = 3789 + 4598.\lambda.$$

Afin de faciliter la comparaison de cette solution à celle que donne l'algorithme des fractions continues, je vais rapporter les quotients qui entrent comme dénominateurs des fractions intégrantes, dans la

fraction continue égale à $\frac{a}{\alpha}$: ces quotients sont

$$170,\ 1,\ 9,\ 4,\ 6,\ 2,\ 1,\ 5;$$

en sorte que

$$\frac{a}{\alpha} = \cfrac{1}{170 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}};$$

les fractions convergentes à calculer successivement sont

$$\frac{1}{170},\ \frac{1}{171},\ \frac{10}{1709},\ \frac{41}{7007},\ \frac{256}{43751},\ \frac{553}{94509},\ \frac{809}{138260},$$

et la fraction suivante serait

$$\frac{4598}{785809} = \frac{a}{\alpha}.$$

On aura, d'après le procédé de Lagrange,

$$x = -\ 138260,\quad y = -\ 809.$$

Pour déduire de ces valeurs négatives des solutions positives, on ajoutera $\alpha = 785809$ à x, et $a = 4598$ à y; il vient ainsi

$$x = 647549,\quad y = 3789;$$

ce sont les nombres qui ont été trouvés par l'autre méthode. On aurait pu simplifier un peu ce dernier calcul en procédant, pour la formation des quotients de la fraction continue, de manière à amener les moindres restes dans chaque division; mais cela n'aurait pas suffi, ce nous semble, pour compenser la plus grande longueur du calcul numérique.

[XXII]. La résolution de l'équation

$$a\mathrm{X} - \mathrm{AY} = 1,$$

où A est un nombre composé $\alpha.\mathrm{A}_1$, se ramène facilement à celle de deux équations de la forme

$$ax - \alpha y = 1,$$
$$ax_1 - \mathrm{A}_1 y_1 = 1;$$

car on tire de celles-ci

$$ax - 1 = \alpha y,$$
$$ax_1 - 1 = A_1 y_1;$$

et par la multiplication

$$(ax - 1)(ax_1 - 1) = \alpha A_1 y y_1,$$

ou bien

$$1 - (ax - 1)(ax_1 - 1) + A y y_1 = 1.$$

Si l'on compare cette équation à la proposée

$$aX - AY = 1,$$

on voit que celle-ci sera satisfaite en posant

$$aX = 1 - (ax - 1)(ax_1 - 1), \quad AY = -A y y_1,$$

ce qui donne les valeurs entières

$$X = x + x_1 - axx_1, \quad Y = -y y_1:$$

ainsi Y et X seront deux nombres connus si x, x_1, y, y_1 ont été préalablement déterminés. Si α et A_1 sont des nombres premiers, on pourra employer la méthode précédente pour traiter séparément les deux équations en x et y, en x_1 et y_1; si A_1 était encore un nombre composé égal à α_1, α_2,..., on pourrait joindre à l'équation

$$ax - \alpha y = 1$$

les suivantes

$$ax_1 - \alpha_1 y_1 = 1,$$
$$ax_{11} - \alpha_{11} y_{11} = 1,$$
etc.,

d'où

$$(ax - 1)(ax_1 - 1)(ax_{11} - 1)\ldots = \alpha\alpha_1\alpha_{11}\ldots y y_1 y_{11}\ldots$$

Soit i le nombre de ces facteurs simples α, α_1, α_{11},..., égaux ou inégaux de A; on aurait

$$(ax - 1)(ax_1 - 1)(ax_{11} - 1)\ldots + (-1)^{i-1} - A y y_1 y_{11}\ldots = (-1)^{i-1}:$$

en multipliant par $(-1)^{t-1}$ cette formule, on aura

$$1 - (1 - ax)(1 - ax_{,})(1 - ax_{,,})\ldots - A(-1)^{t-1} y_{,} y_{,,} y_{,,,} \ldots = 1.$$

Celle-ci étant comparée à l'équation à resoudre

$$aX - AY = 1,$$

permet de prendre pour valeurs entières de Y et X,

$$Y = (-1)^{t-1} y_{,} y_{,,} y_{,,,} \ldots\ldots\ldots\ldots - \lambda a,$$

$$X = \frac{1 - (1 - ax)(1 - ax_{,})(1 - ax_{,,})\ldots}{a} + \lambda A.$$

λ étant toujours un entier arbitraire positif ou non. Pour le calcul de ces nombres, il convient de s'occuper d'abord de Y : il est donné par le produit des $y, y_{,}, y_{,,}\ldots$ qui sont des nombres connus; quant à X, il le sera par l'équation même lorsque Y aura été obtenu.

Comme la valeur de Y pourra être un grand nombre, on en écartera, si l'on veut, tous les multiples de a selon la marche indiquée [XVIII] pour réduire cette valeur à son résidu selon le module a.

Il existe d'autres procédés pour ramener la congruence $aX - AY = 1$ à la résolution des congruences $ax - \alpha y = 0$, $ax - \alpha_{1} y_{1} = 1$, etc. (*Voyez* les *Disquisitiones arithm.* de M. Gauss, ou la traduction française de M. Delille, seconde section, art. 30). Celui que nous venons d'employer est assez simple dans sa marche; mais nous allons exposer une méthode qui dispense, comme celle de Bachet ou de Lagrange, de décomposer A dans ses facteurs premiers α, α_{1}, etc.

[XXIII]. La méthode de l'art. [XVI] supposait α premier; elle s'applique néanmoins, sans aucune modification, à l'équation

$$ax - Ay = 1,$$

où a et A seraient des nombres composés, toutes les fois qu'en procédant sur les entiers $a < A$ qui sont premiers entre eux, comme si l'on voulait déterminer leur commun diviseur, à l'aide du procédé de l'art. [VI], on arrive, par une seule catégorie de divisions, à un dernier résidu ± 1 : nous avons indiqué plusieurs cas généraux, dans l'art. [XIV],

où cette circonstance doit se présenter; alors on a, entre les nombres a, A et les quotients $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, la relation (12)

$$aP - AP_1 = (-1)^m,$$

où $P = p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}$: il est clair qu'en appliquant cette formule de la même manière que dans le cas de $A = \alpha$, nombre premier, on arrivera à la valeur de x, savoir,

$$x = P(-1)^m + \lambda . A;$$

et quand x sera connu, on en déduira y par l'équation proposée

$$ax - Ay = 1.$$

Si le produit $P = p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}$ est composé de beaucoup de facteurs, on devra procéder à son égard, ainsi que nous l'avons expliqué [XIX], pour arriver à son résidu P_A, relatif au diviseur ou module A.

Cette marche revient encore à celle qui a été expliquée [art. XVIII] : après avoir déterminé le résidu P_A de la division du produit $P = p\,p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}$ par A, en sorte que l'on puisse poser

$$P = P_A + M.A,$$

si l'on substitue cette valeur de P dans l'équation (12), elle devient

$$a(P_A + MA) - AP_1 = (-1)^m,$$

ou bien

$$aP_A - (-1)^m = A(P_1 - aM),$$

et par la division on aura

$$P_1 - aM = \frac{aP_A - (-1)^m}{A}:$$

soit $P_{1,a}$ le quotient entier fourni au second membre; il sera évidemment au-dessous de a, car $\frac{P_A}{A}$ est moindre que l'unité, P_A étant un résidu qui provient du module A. Avec cette quantité entière $P_{1,a}$, on a l'équation

$$aP_A - AP_{1,a} = (-1)^m,$$

où les nombres P_A et $P_{1,a}$ sont respectivement inférieurs à A et à a: on doit remarquer que la valeur de M n'a pas été calculée : elle dépend du nombre P que l'on a voulu se dispenser d'évaluer.

Lorsque l'on aura rencontré pour dernier résidu a_n de la première catégorie des divisions un nombre différent de ± 1, la formule (12) n'aura plus lieu ; en ce cas, on aura la relation générale (11),

$$aP - AP_1 = a_n(-1)^m.$$

On devra passer à la seconde catégorie, où a va servir de dividende constant, a_n de premier diviseur, et l'on trouvera, ainsi qu'il a été expliqué [art. VI], une suite de résidus $\pm b_1$, $\pm b_2, \ldots, \pm b_{n'}$: si le dernier de ces nombres $b_{n'} = 1$, on aura, d'après la formule (13),

$$a[PQ - Q_1(-1)^m] - AP_1Q = (-1)^{m+m}.$$

En combinant cette formule avec l'équation proposée, ainsi que nous l'avons fait pour le premier cas, et après avoir mis l'équation donnée sous la forme

$$ax(-1)^{m+m'} - Ay(-1)^{m+m'} = (-1)^{m+m},$$

on en conclura, pour déterminer les valeurs générales des nombres x et y,

$$x(-1)^{m+m'} = PQ - Q_1(-1)^m - \lambda.A,$$
$$y(-1)^{m+m'} = P_1Q - \lambda.a.$$

Les formules

$$(11)\quad \begin{cases} aP - AP_1 = (-1)^m a_n, \\ a_nQ - aQ_1 = (-1)^m, \end{cases}$$

permettront de simplifier le calcul, s'il se présentait avec trop de complication, en raison de la grandeur des nombres. En effet, au moyen de la relation (11) entre P et P_1, a_n étant un résidu calculé, a et A étant des nombres donnés, on pourra réduire le produit P à son résidu P_A selon A, en négligeant le multiple de A que P renfermera : on calculera ensuite une valeur $P_{1,a}$ par l'équation

$$aP_A - P_{1,a}A = (-1)^m.a_n.$$

qui n'est que l'équation (11) où P est remplacé par P_A; il en résulte

$$P_{1,a} = \frac{aP_A - (-1)^m a_n}{A}.$$

$P_{1,a}$ sera un entier : il différera de P_1 par un multiple de a qui sera le même que le multiple de A par lequel P_A diffère de P. On réduira aussi le produit Q à son résidu Q_a relatif au diviseur a, et dans y on remplacera P_1 et Q par leurs résidus $P_{1,a}$ et Q_a : on pourra même ne prendre à la place du produit P_1Q que son résidu σ relatif à a; on aura ainsi

$$y = \sigma - (-1)^{m+n} + \lambda_1 a;$$

à cette valeur de y on adjoindra la valeur correspondante de x, fournie par l'équation

$$ax - Ay = 1.$$

Le cas que nous venons de traiter où $b_{n'} = \pm 1$, aura nécessairement lieu toutes les fois que $a < A$, sera un nombre premier; il se présentera encore lorsque le plus petit des diviseurs de a surpassera le résidu a_n trouvé à la fin de la première catégorie de divisions [XIV].

Il est facile de voir que si le résidu $b_{n'}$ n'était pas ± 1, comme nous venons de le supposer, il faudrait passer à une nouvelle catégorie de divisions, qui amènerait à employer la relation (14), ou même les relations subséquentes, si l'on était obligé de poursuivre la recherche du dernier résidu qui doit nécessairement prendre la grandeur ± 1, puisque A et a ont été supposés premiers entre eux. Nous répétons qu'il sera très-rare que l'on ait à employer plus de deux catégories de divisions pour parvenir à reconnaître, par le résidu ± 1, que les nombres A et a sont premiers entre eux.

Note sur la Convergence des Suites;

PAR M. J. BINET.

On doit à M. Cauchy une règle importante sur la convergence de la série $U = u_1 + u_2 + \ldots u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$: il l'a déduite de la comparaison des termes de rangs très-avancés u_n, u_{n+1}, etc., que l'on suppose positifs, avec ceux de la suite

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\alpha}} + \text{etc.},$$

dont la convergence ou la divergence dépendent du signe de α. (Voyez l'*Analyse algébrique* et le deuxième volume des *Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy.) En partant de cette dernière proposition, l'on reconnaît facilement que la série

$$S_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha_{n+1}}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\alpha_{n+2}}} + \text{etc.}$$

sera convergente toutes les fois que α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, etc., formeront une suite indéfiniment croissante; que S_n demeure encore convergente si les α_n, α_{n+1}, ..., finissent par devenir positifs à partir d'un certain rang, et continuent à rester positifs et finis jusqu'à α_∞. La série serait divergente si, à partir d'un certain rang assignable p, la suite des α_p, α_{p+1}, etc., entrait dans le négatif et y restait jusqu'à l'infini.

Ayant admis que u_n, u_{n+1}, etc., sont positifs, nous pouvons poser, en général,

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}},$$

et alors la partie $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} = U_n$ de la série proposée sera remplacée par

$$U_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha_{n+1}}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\alpha_{n+2}}} + \text{etc.}$$

Cette série, d'après la remarque précédente, exige, pour la convergence, que la quantité α_p évaluée pour de hautes valeurs de $p > n$ demeure positive, sans pouvoir devenir infiniment petite; mais elle pourra admettre pour α_p toute grandeur positive indéfiniment crois-

sante avec p. Or de l'équation $u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}}$ on tire $n^{\alpha_n} = \frac{1}{nu_n}$, et en prenant les logarithmes,

$$\alpha_n = -\frac{l(nu_n)}{l(n)}.$$

α_n devant demeurer positif pour de hautes valeurs que nous dénoterons par n, au lieu de p, il faut que le logarithme $l(nu_n)$ soit constamment négatif; à cette première condition l'on doit joindre celle qui veut que $-\frac{l(nu_n)}{l(n)}$ demeure ou indéfiniment croissant ou tout au moins fini quand n s'avance vers l'infini. Si au contraire la fonction $-\frac{l(nu_n)}{l(n)}$ décroît continuellement à mesure que n augmente, jusqu'à devenir infiniment petite, nulle ou négative quand $n = \infty$, la série U_n n'admettra pas de limite finie et par conséquent la série U, dont elle fait partie, sera divergente.

En énonçant son théorème sous une autre forme, M. Cauchy dit que la convergence de la série U exige que le rapport $-\frac{l(nu_n)}{l(n)}$ converge vers une limite positive finie et *déterminée* g : la proposition est ainsi exactement exprimée, pour le cas où ce rapport décroît avec $\frac{1}{n}$; mais il nous semble utile d'ajouter que si ce rapport est indéfiniment croissant avec n dans le sens positif et n'admet plus de limite déterminée, la convergence de la série n'en devient que plus rapide. Avec cette extension le critérium comprend la plupart des règles proposées pour constater la convergence d'une suite infinie. Nous montrerons, dans une autre occasion, comment il peut être employé dans des cas qui ont été jugés difficiles, par exemple, lorsque la loi de la série est telle que $u_{n+1} = u_n(1 - \beta_n)$, β_n exprimant une fonction décroissante avec $\frac{1}{n}$ et qui devient infiniment petite pour des valeurs infinies de n.

ERRATA pour le Mémoire de M. Liouville, *sur l'élimination.*
(Cahiers de septembre, octobre et novembre.)

Page 380, ligne 16, *au lieu de* $\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h} = -\frac{\Sigma k}{\Sigma h}$, *lisez* $\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h}$

Page 380, ligne 20, *supprimez la fin de la phrase à partir des mots* ou (ce qui revient au même est égale, etc.

Page 411, ligne 8, *au lieu de* ω et θ, *lisez* ω et Ω

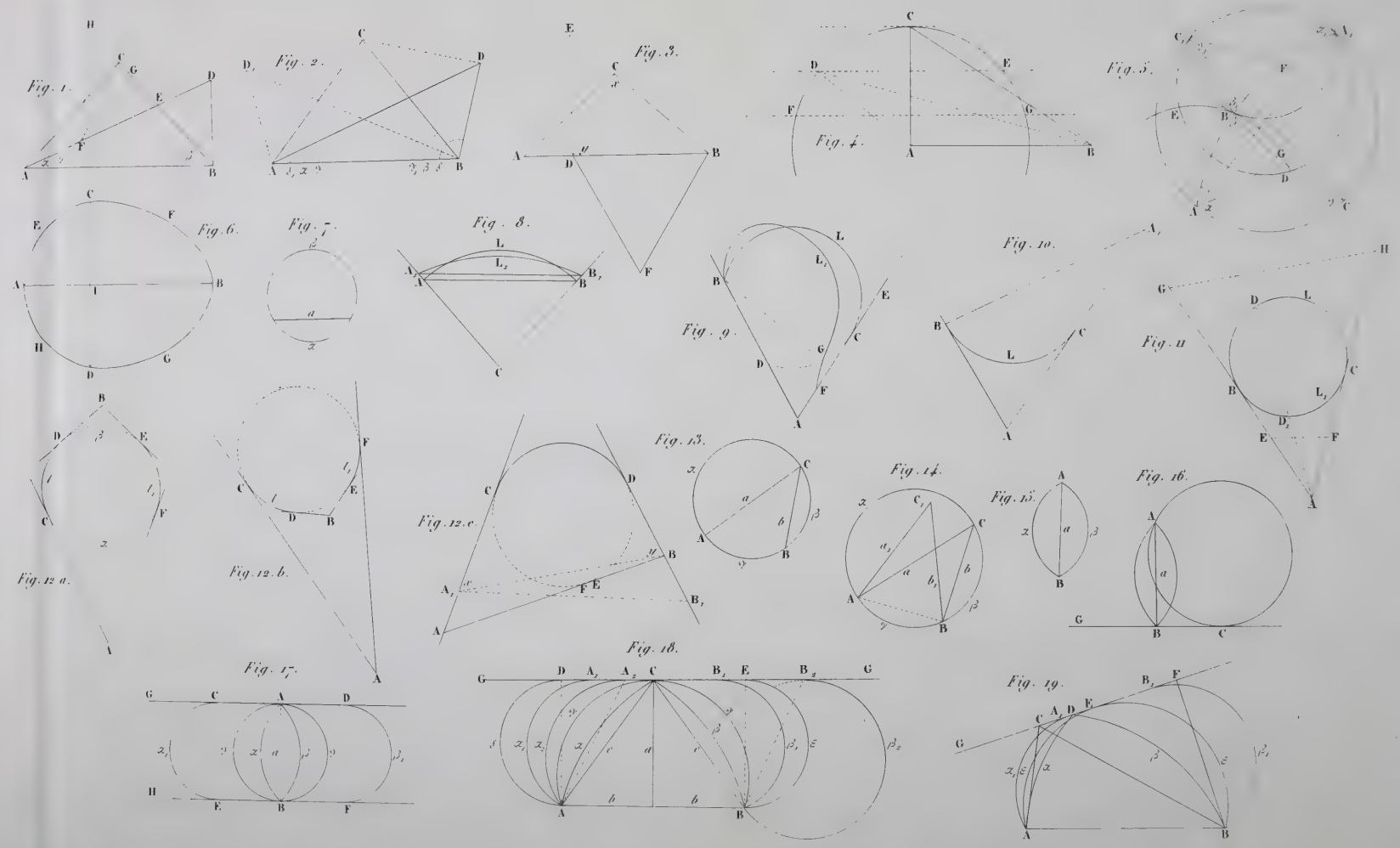


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12 a.
Fig. 12. b.
Fig. 12. c.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

QA
1
J684
t.6
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY